

國立交通大學應用數學系  
九十八學年度大學甄選入學考試試題

說明：

- (1) 答題前，請先檢查答案本封面上之編號是否與座位上之編號相符。
- (2) 本試卷共有六大題（3頁試題），總分共計100分，測驗時間為100分鐘。
- (3) 作題時，必須要寫下計算過程，若是僅有答案，則該題不允計分。

第一題（20分）

已知兩個函數  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  與  $g(x) = x^2 - 1$ ，試問

- (1)（4分） $x = 1$  是  $f(x) = 0$  之一實根，請求出另兩個實根；
- (2)（6分）請求出  $f(x) - g(x) = 0$  之所有根；
- (3)（4分）請分別寫下滿足  $f(x) \geq g(x)$  與  $f(x) \leq g(x)$  之  $x$  的範圍；
- (4)（6分）綜合上列各小題之結果，請繪出函數  $f(x)$  與  $g(x)$ ，並且標示出其兩函數之交點座標與各自交  $x$ -軸之座標。

第二題（15分）

- (1)（4分）當  $x > 0$  時，試問  $\ln x < x < 2^x$  是否正確？
- (2)（5分）請計算  $\tan \frac{\pi}{8} + \tan \frac{2\pi}{8} + \tan \frac{3\pi}{8} + \tan \frac{5\pi}{8} + \tan \frac{6\pi}{8} + \tan \frac{7\pi}{8} + \tan \frac{9\pi}{8} = ?$
- (3)（6分）若  $(r, \theta)$  為極座標上一點的表示，請繪出滿足  $r = \theta^2$ ，在當  $\theta \in [-2\pi, 2\pi]$  之圖形。

第三題 (15分)

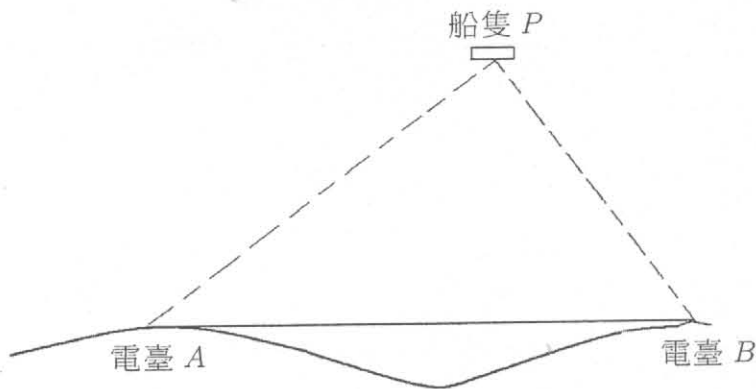
坐標平面上有三點  $A, B, C$ ，其坐標分別是  $(1, 1), (2, 4), (4, 0)$ ，試問

- (1) (4分) 假設點  $P(x, y)$  滿足  $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ ，其中  $s, t$  為實數且  $s + t = 1$ ，請證明所有點  $P(x, y)$  所形成的圖形為一直線並且求出此直線方程式；
- (2) (5分) 滿足  $s + t = 1$  而且使得  $|s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}|$  為最小之  $s$  與  $t$  分別為何？請解釋其幾何意義；
- (3) (6分) 假定  $P(x, y)$  為  $A, B, C$  三點所圍成之三角形區域中的點，請以  $\overrightarrow{AB}$  及  $\overrightarrow{AC}$  表示出  $\overrightarrow{AP}$ ，並且證明此表示式。(提示：將  $\overrightarrow{AP}$  表示成  $s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$  的形式。)

第四題 (20分)

用於測定船隻位置的長程無線電波定位系統 (LORAN)，是由海岸上  $A$  與  $B$  兩個不同固定的電臺，在同一時間發射出無線電波，其速度是每秒  $3 \times 10^8$  公尺，船隻利用接收無線電波的時間差，轉換為距離差，藉以提供確認船隻所在位置  $P$  之重要訊息。試問

- (1) (5分) 若現有一船隻希望在航行時，能使得接收自電臺  $A$  與  $B$  的電波之時間差為固定，那麼該船隻需沿著那些類型的曲線航行才可能辦得到？請解釋之；
- (2) (5分) 承上題，假設電臺  $B$  在電臺  $A$  之正東方，兩電臺之間的距離是  $3 \times 10^5$  公尺，船隻接收自電臺  $B$  的電波時間較接收自電臺  $A$  的電波早  $10^{-4}$  秒。請建構一坐標系並在此坐標系上描述該船隻航行的曲線方程式；
- (3) (5分) 承上題，假若已知船隻在電臺  $B$  之正北方，那麼船隻離電臺  $B$  是多遠？
- (4) (5分) 是否可能建構一套系統，由數個固定電臺組成，可以不需方位測量，即可確認船隻所在位置？請解釋之。



第五題 (15分)

- (1) (4分) 碼頭上有三艘不同的渡船，每艘船一次最多僅能搭載五人渡江，試問若要讓六人同時一次安全渡江的搭載方法數有多少？
- (2) (5分) 承上題，請問哪一種人數分配具有最大的機率？
- (3) (6分) 假設碼頭上有  $M$  艘不同的渡船，每艘船一次最多僅能搭載  $N$  人渡江，在  $L, M, N$  均為正整數， $L \leq MN$  且  $L < N + 3$  的情形下，試問若要讓  $L$  人同時一次安全渡江的搭載方法數有多少？

第六題 (15分)

- (1) (2分) 二階方陣  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ ，請計算  $AA = ?$
- (2) (8分) 二階方陣  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $a, b, c$  與  $d$  均為未知實數，試問若是  $BB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，請求出  $a + d$  與  $ad - bc$  之所有可能；
- (3) (5分) 二階方陣  $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， $a, b, c$  與  $d$  均為未知實數，試問若是  $CC = C$ ，請求出  $a + d$  之所有可能。