九十六學年度大學甄選入學考試試題

說明:

(1) 答題之前請先檢查所取得之答案卷是否正確。

(2) 本試卷共六題計算證明題，總分共計 100 分。測驗時間 110 分鐘。

(3) 答題時，請仔細寫下解題過程及計算。若只寫答案，則不予計分。

(4) 請依題號順序作答。

(5) 繳卷時請同時繳回題目卷。

第一題

(1) 令 $p(x)=\sum_{k=0}^{10}(-1)^k(k+1)\cdot x^k=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+\overset{11}{\cancel{10}}x^{10}$

(a) $3x+1$是否爲$p(x)$的因式？ 請說明理由。（2分）

(b) $x-2$是否爲$p(x)$的因式？ 請說明理由。（2分）

(2) 試求方程式$x^4-x^2-2x-1=0$的所有實根。（5分）

(3) 證明方程式$x^7+x-55=0$恰有一正根。（7分）

第二題

設θ爲實數，令$M_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，其中$M_\theta^n=\underbrace{M_\theta\times M_\theta\times\cdots\times M_\theta}_{n個}$.

(1)設θ爲實數，證明$M_\theta^2=M_{2\theta}$.（3分）

(2)設θ爲實數，試證對任意正整數n，恆有$M_\theta^n=M_{n\theta}$.（4分）

(3)設$\theta=\frac{\pi}{12}$,

(a) 試利用弗美棣定理求$(M_\theta+M_\theta^2+\cdots+M_\theta^{23})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.（6分）

(b) 視M_θ爲坐標平面上的變換，驗證(a)中你求得的答案。（5分）

第三題

(1) 設 $P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$，試求 P^{-1}。（3分）

(2) 設 $A=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 19 & -7\end{pmatrix}$，試求 $P^{-1}AP$。（3分）

(3) 試求 A^{100}。　（5分）

(4) 試求 A^{200}。　（5分）

第四題

設 P 爲坐標平面上的任意一點，其坐標爲 (a,b)，我們定義 $P\mapsto\hat{P}$ 的轉換如下：

$$\hat{P}\text{ 的坐標爲}\begin{cases}(a,b) & \text{當 } a\geq b \text{ 時}\\ (b,a) & \text{當 } b>a \text{ 時}\end{cases}$$

(也就是說點 $\hat{P}$ 是將點 P 的坐標分量依遞減順序重新排列而得到的點)。

令 O 爲原點，$\overline{OP}$ 爲始點爲 O，終點爲 P 的向量。

(1) 設 A、B 爲坐標平面上二點，其坐標分別爲 $(1,2),(4,3)$。證明

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}\leq\overline{O\hat{A}}\cdot\overline{O\hat{B}}\text{。（3分）}$$

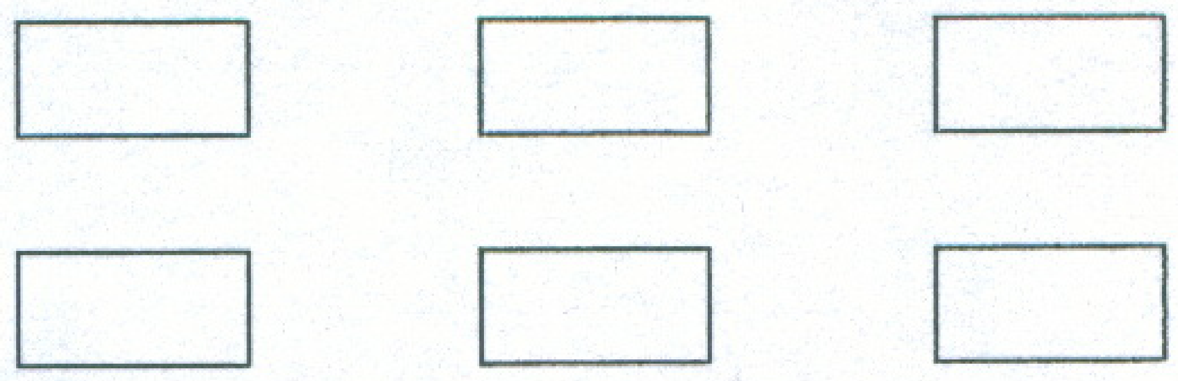
(2) 設 A、B 爲坐標平面上任意二點，其坐標分別爲 $(a,b),(c,d)$。
證明

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}\leq\overline{O\hat{A}}\cdot\overline{O\hat{B}}\text{。（9分）}$$

(3) 請解釋(2)中 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}\leq\overline{O\hat{A}}\cdot\overline{O\hat{B}}$，"="成立的幾何意義。（4分）

第五題

某試場共有六個座位，座位安排如下圖所示。



（試場中共有兩排，每排三個座位）

本次考試六名考生 A, B, C, D, E, F 在考試前抽籤安排座位入場應考。其中 A, B 兩考生在考前約定當兩人座位相鄰時，A 考生在考試會給 B 考生看他的答案。

(1) A, B 兩人座位相鄰的機率爲多少？（3 分）

(2) 假設 A, B 兩考生爲了讓兩人的答案有所區別，約定當 A, B 兩人座位相鄰時，B 考生第一題的答案必須和 A 考生第一題的答案不同，其他幾題答案則爲相同。已知

(i) 第一題爲單選題，

(ii) A 考生第一題答對的機率爲 $\frac{1}{2}$，

(iii) 當 A, B 兩人座位相鄰且 A 考生第一題答錯時，B 考生第一題答對的機率爲 $\frac{1}{3}$，

(iv) 當 A, B 兩人座位不相鄰時，B 考生本次考試成績一定會比 A 考的成績爲低。

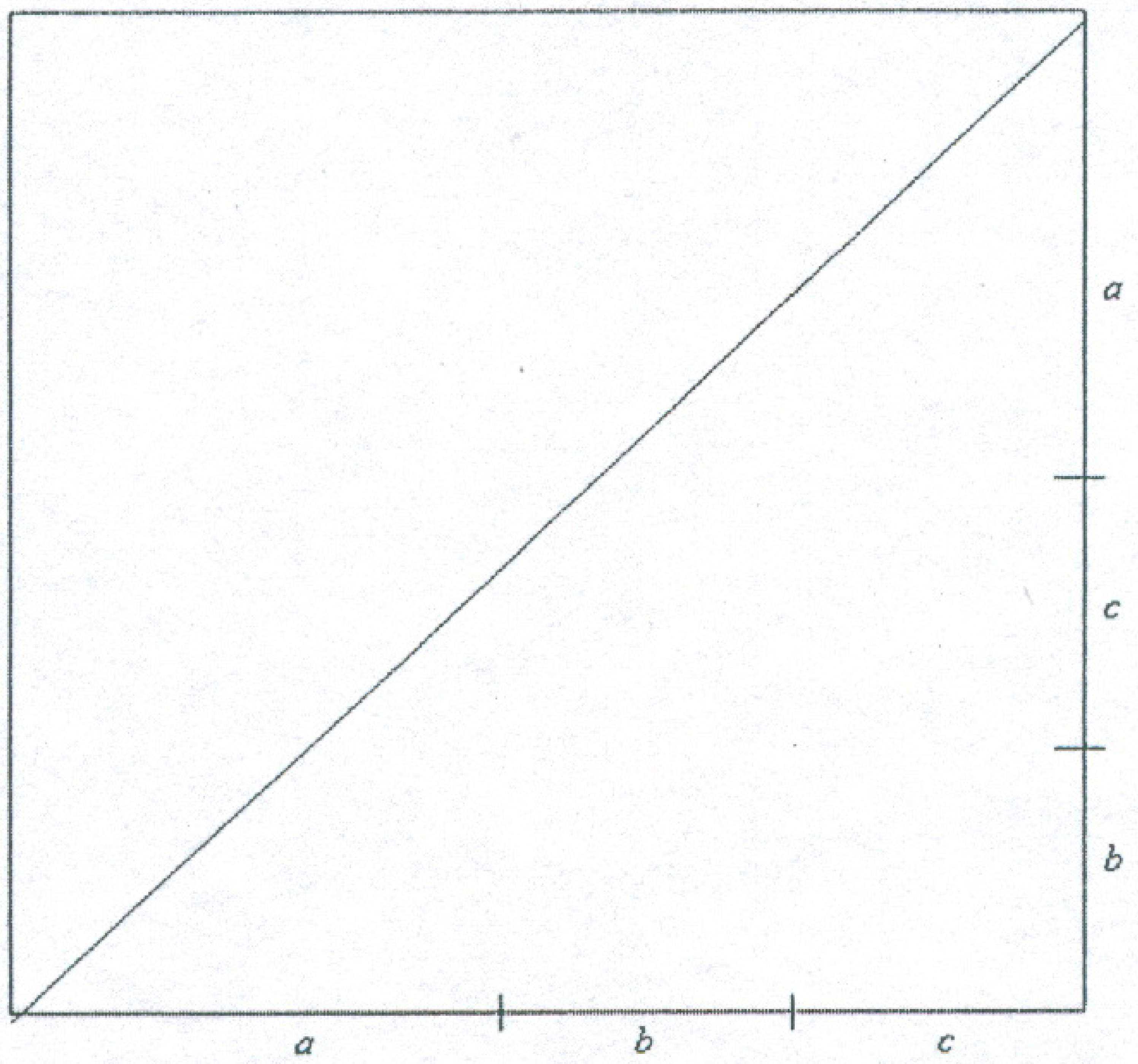
試問：B 考生本次考試成績會較 A 考生的成績高的機率是多少？（5 分）

(3) 續上題。試問當 A, B 兩人座位相鄰且 B 考生第一題答錯時，A 考生第一題答對的機率爲何？（8 分）

第六題

(1) 設a,b,c爲正實數，試比較$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$和$\sqrt{2}(a+b+c)$的大小關係。

(a) 考慮邊長爲$a+b+c$的正方形如下圖，證明你的結論。（4分）



(b) 試用其他方法，證明你的結論。（4分）

(2) 請討論$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=\sqrt{2}(a+b+c)$的情形。（5分）

(3) 能否將上述 (1) 的結論推廣到更一般的情形？請說明理由。（5分）