

國立交通大學應用數學系九十四學年度大學甄選入學招生試題

94年4月8日

此測驗題共計十大題，務請詳細寫出計算、證明、說明過程

一、(1)(2分) 試述反函數之定義。

(2) (4分) 一個函數是否一定有反函數？請述明理由，並舉例說明之。

(3) (4分) 若一個函數有反函數，其反函數可能有幾個？請述明理由。

二、(10分) 設  $w \neq 1$  為  $y^3 - 1 = 0$  的一個根。令  $x$  的方程式

$$\begin{vmatrix} w-x & w^2 & w^3 \\ w^2 & w^4-x & w^6 \\ w^3 & w^6 & w^9-x \end{vmatrix} = 0$$

的三個根是  $\alpha, \beta, \gamma$ ，則  $\alpha + \beta + \gamma = \underline{\hspace{2cm}}$ ，為什麼？

三、設有 4 個白球、8 個黑球及 2 個空箱子。任意取 6 個球放入第一個箱子，其餘 6 個球放入第二個箱子。

(1)(5分) 恰有 3 個白球在第一個箱子的機率？

(2)(5分) 已知有 3 個白球在第一個箱子。在第一、第二箱中各任取一球將第一箱中取出的球放入第二箱中，同樣的將第二箱中取出的球放入第一箱中。最後第一箱仍有三個白球的機率？

四、(10分)拋物線  $y = 9x^2$  及直線  $y = 6x + 3$  交於 A, B 兩點。設 C 點在拋物線上，且與拋物線的最小值點落在由直線  $y = 6x + 3$  所分割的同一半平面上。請問 C 點應如何取，使得  $\triangle ABC$  面積最大？

五、假定新竹市在晴天之後隔天下雨的機率為  $1/3$ ，而在雨天之後隔天也是雨天的機率為  $1/2$ 。

(1)(5分)試將此資訊寫成轉移矩陣之形式。

(2)(5分)若開始觀察當天為晴天，即  $\overline{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，試求  $\overline{X}_2$ 。

(你必須利用(1)去求。)

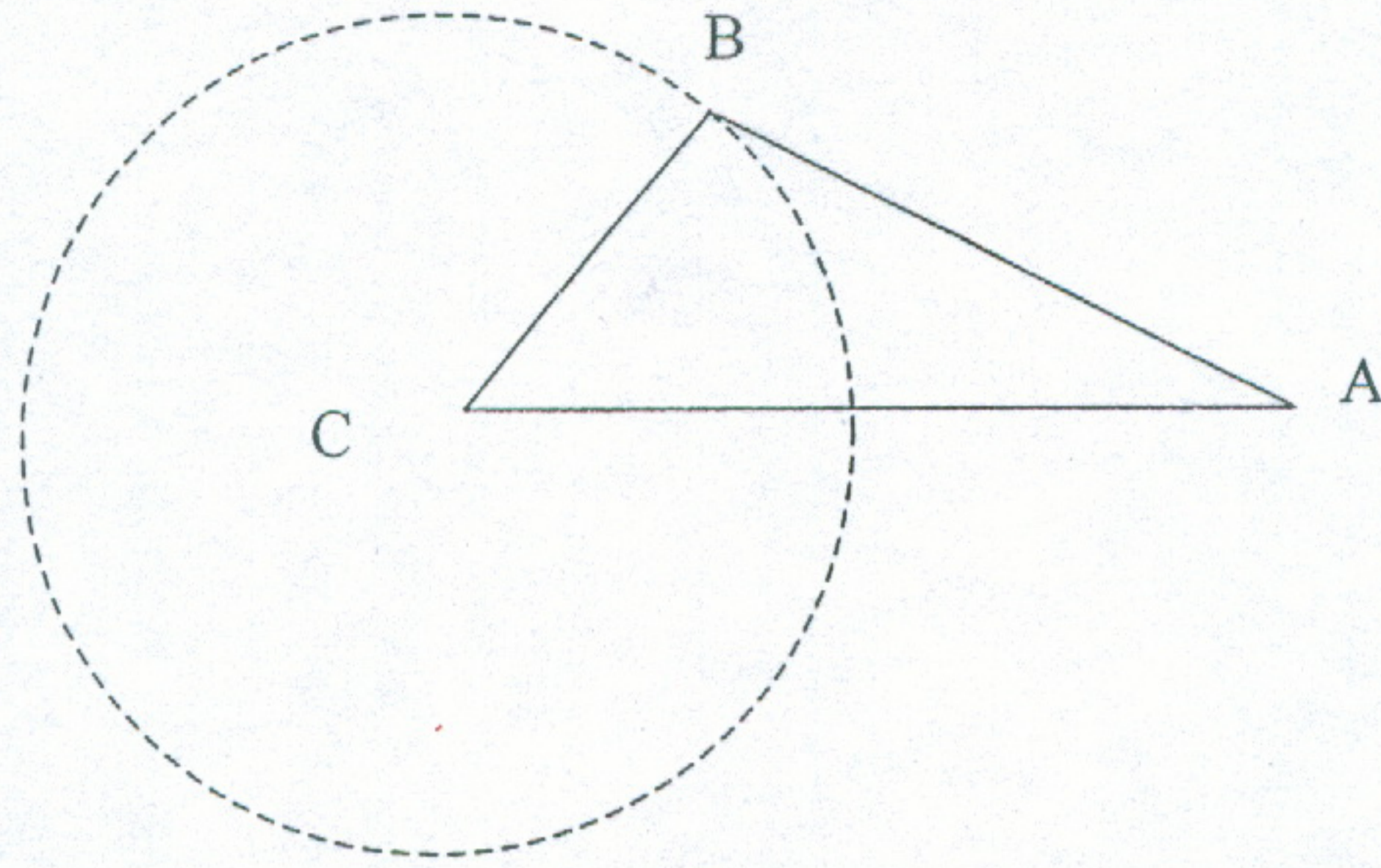
六、(10分)利用“不變式”化簡方程式  $\Gamma: x^2 + xy + y^2 = 1$ ，並作出  $\Gamma$  的圖形。

七、(10分)假設  $m, n$  為兩互質正整數。證明  $m$  位數  $1 \cdots 1$  ( $m$  個 1) 和  $n$  位數  $1 \cdots 1$  ( $n$  個 1) 互質。

八、(10分)求  $X^{100} + 1$  被  $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X$  所除所得之餘式。

九、(10分)設  $B$  為以  $C$  為圓心半徑 1 之單位圓上之一動點， $A$  為圓

外一定點， $|CA|=2$  (如下圖所示)。試證： $\cos A = \frac{2 - \cos C}{\sqrt{5 - 4\cos C}}$ 。



十、(10分)試求直線  $L: \frac{2x+3}{3} = \frac{4y-11}{-1} = \frac{z+6}{-1}$  與球面

$S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 3 = 0$  的最短距離。