一

國立交通大學應用數學系九十三學年度大學甄選入學試題

2004 年 4 月 9 日

此測驗共計九大題，務請詳細寫出計算、證明、說明過程。

一. (10 分) 令函數 $f(x)=4x^2+4\sqrt{3-3x^2}-5$，且 $x>0$。則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極大值 b，求 (a,b)。

二. (10 分) 假設有一數列 $<a_n>$，其首 n 項之和爲 $S_n=n^2+2n+2$，$n\in Z^+$，試求

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=?$$

三. (10 分) 令 $\theta=\dfrac{\pi}{18}$，求 $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin 35\theta=?$

四. (10 分) 在 96 年的 NBA 球季中，公牛隊喬丹在陣中時勝率爲 0.7，喬丹受傷缺陣時勝率爲 0.5。喬丹於該球季 120 場賽事中共出賽 105 場，試問公牛隊在其中一場比賽得勝時，喬丹有上場的機率爲何?

五. 令 $\vec{a}=<a_1,a_2,a_3>$，$\vec{b}=<b_1,b_2,b_3>$ 爲空間中兩個向量，我們定義 $\vec{a}\times\vec{b}$ 爲 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的外積，$\vec{a}\times\vec{b}=<a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1>$。

(1) (4 分) 證明 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 同時跟 $\vec{a}\times\vec{b}$ 垂直。

(2) (6 分) 利用(1)的結果求兩個平面 $2x-3y+z+1=0$ 與 $x+y-2z+3=0$ 的交線的方向向量，並寫出此交線的參數方程式。

六. (1) (5 分) 試證明下列方程組

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x+2y=2, \\ 3x+4y=5, \end{cases} \quad \text{無解。}$$

(3) (5 分) 試證，若方程組

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases} \quad \text{有解，}$$

則 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = 0$。

七. (1) (5 分) 請比較 $2^{\log 3}$ 與 $3^{\log 2}$ 的大小。

(2) (5 分) 如果 $0 < x_1 < x_2$，證明

$$\log_2(\frac{x_1 + x_2}{2}) > \frac{1}{2}(\log_2 x_1 + \log_2 x_2)\ 。$$

(3) (5 分) 利用(2)來比較 $\log_2 7$ 與 $\frac{3}{4}\log_2 3 + \frac{1}{4}\log_2 19$ 之大小。

八. 設 S 爲空間中之球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$。

(1) (2 分) 空間中平面 $E_0 : x + y - z - 1 = 0$ 與球面 S 相交於一圓，求此圓之圓心座標。

(2) (4 分) 試列出所有經過點 $P(1,0,0)$ 與點 $Q(0,1,0)$ 之空間中平面方程式。

(3) (4 分) 承上題，設 E 爲空間中任意經過點 $P(1,0,0)$ 與點 $Q(0,1,0)$ 之平面，且平面 E 與球面 S 相交之圓的圓心爲 C，試求 $\overrightarrow{CP}$ 與 $\overrightarrow{CQ}$ 之夾角餘弦。

九. 設 A,B 爲兩個 2 階方陣，I 爲 2 階單位方陣。

(1) (2 分) 在尋找方陣 A 滿足 $A^2 = I$ 之時，我們做了推導如下：

$O = A^2 - I = (A+I)(A-I)$ 所以 $A = I$ 或 $A = -I$。

請問以上推導，那個步驟出錯?

(2) (3 分) 在(1)中，除了 I 與 $-I$ 之外，是否還有其他 2 階方陣滿足 $A^2 = I$？若有，請寫出並驗算之。

(3) (5 分) 除了 I 之外，找出一個 2 階方陣滿足 $A^3 = I$。

(4) (5 分) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ 是否恆成立? 若恆成立，請證明之。否則，請舉反例說明其不一定成立。