

國立交通大學應用數學系九十二學年度推薦甄選試題

2003年3月21日 13:30 - 15:20

此測驗共計十大題，務請詳細寫出計算、證明、說明過程。

一. (5分) 請比較下列兩數的大小

$$10^{100} + 6^{100} \quad \text{與} \quad 7^{100} + 4^{100} + 3^{100} + 2^{100}.$$

二. (10分) 試證明對於所有實數 x ，下列不等式成立

$$3 - \sqrt{5} \leq \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 + 4x + 5} \leq 3 + \sqrt{5}.$$

三. (5分) 若 $\theta = \frac{\pi}{12}$ ，求

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos 24\theta = ?$$

四. (5分) 設 x, y 是實數且 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，求 xy 的最大及最小值。五. (1)(5分) 若函數的定義域與值域都是實數，請分別對“嚴格遞增函數”和“一對一函數”給一個定義，並請寫出兩者之間的關係。(2)(5分) 試問 $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$, $x > \frac{5}{2}$ ，是否是一個嚴格遞增函數？(3)(5分) 試問上題(2)的函數 f 有沒有反函數？若沒有，請說明之。若有，請導出其反函數。六. (1)(4分) 試說明 $\sqrt{x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13} = 6$ 是一個橢圓的方程式。(2)(6分) 求上題(1)橢圓的焦點、中心及其長短軸長度。七. (1)(5分) 設 E 為通過點 $P(1, 2, 3)$ 且垂直於 $\vec{n} = (1, -1, 1)$ 的平面， L 為通過點 $Q(3, 4, 1)$ 且垂直於平面 E 的直線。求平面 E 與直線 L 的方程式。

(2)(10 分) 設 L_0, L_1, L_2 為空間中相異三直線, E_0, E_1, E_2 為空間中相異三平面. 試分別判斷下列敘述是否恆成立. 若恆成立, 請說明理由. 否則請舉反例說明其不一定成立.

- (A) 若 L_1 與 L_2 都垂直於 L_0 , 則 L_1 平行於 L_2 .
 (B) 若 E_1 與 E_2 都垂直於 E_0 , 則 E_1 平行於 E_2 .
 (C) 若 L_1 與 L_2 都垂直於 E_0 , 則 L_1 平行於 L_2 .
 (D) 若 E_1 與 E_2 都垂直於 L_0 , 則 E_1 平行於 E_2 .

八. 交大應數系大一新生張曉明星期日晚上在宿舍清理衣物時, 發現自己有 3 支黑襪、11 支白襪是清潔的, 足夠穿到下週六 (每天一雙同色而不分左右腳的清潔襪子). 因燈火管制在即, 張生慌忙將 14 支襪子未整理就放入襪櫃中. 張生與室友打賭, 每晚由襪櫃中摸出一雙襪子次日穿. 若不同色, 則從次日起不出寢室一步.

(1)(5 分) 請問張生在星期五可參加微積分小考的機率是多少?

(2)(10 分) 請問張生在下週日前, 可出寢室的期望值是幾天? (列出式子即可, 無須計算)

九. (6 分) 設 M 與 N 是兩個 2 階方陣. 試分別判斷下列等式 (A) 及 (B) 是否恆成立. 若恆成立, 請提出根據證實之. 否則請舉反例說明其不一定成立.

- (A) $MN = NM$.
 (B) $M^2M = MM^2$.

十. (1)(10 分) 設 a, b, c, d, e 及 f 是六個常數.

考慮方程組

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

請用矩陣理論說明:

- (A) 何時此方程組無解.
 (B) 何時此方程組有唯一解, 並以矩陣表達出其解.
 (C) 何時此方程組無限多解.

(2)(4 分) 依你所知, 上題(1)在平面上是否有相關的幾何意義?

請說明之.