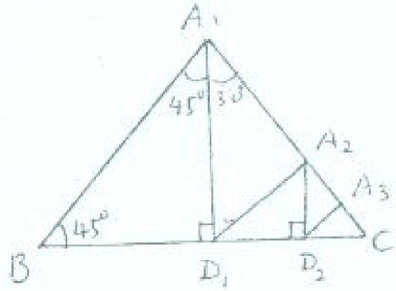
90學年度大學推甄入學考試

一. 已知$\triangle A_1BC$中，$\overline{BC}=1$，$\angle BA_1C=75^0$，$\angle A_1BC=45^0$。今由A_1作$\overline{BC}$的垂線交$\overline{BC}$於D_1，再由D_1作$\overline{A_1B}$的平行線$\overline{D_1A_2}$交$\overline{A_1C}$於A_2。由A_2作BC的垂線A_2D_2，再由D_2作A_2D_1的平行線D_2A_3，以此類推繼續作圖（如圖所示）。令a_1表$\triangle A_1D_1C$的面積，a_2表$\triangle A_2D_2C$的面積，……，a_n表$\triangle A_nD_nC$的面積。求：

1. $\triangle A_1D_1C$的面積a_1；(5 分)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的值。(5 分)



二. 若P(x，y)表滿足$2x^2+3y^2\le 6$之任意點，考慮P點 至直線L：x + y = 1之距離，則此距離之最大值是多少？(10 分)

三. 設有形狀大小完全相同的紅球、黃球和白球各 6 個，共置於一袋。 今從其中任取出 5 球，若每球被取到的機率相等，求 5 球中已知至少有二黃球的條件下，含有兩紅球的機率是多少？(10 分)

四. 求方程式

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 1 \\ 2 & 3-x & 0 \\ 3 & 2+x & 5+x \end{vmatrix}=0$$

的根。(5 分)

五. 若平面 A 通過點(4，－1，1)且垂直於另二平面

B: $2x+y-z=5$

C: $x-y+4z=2$

求平面 A 的方程式。(10 分)

六. 若 $x=\log_2\sqrt{3-\sqrt{8}}$，證明 2^x-2^{-x} 是一有理數。(5 分)

七. 過定點 A(1,2)作直線交定圓 C:$x^2+y^2=1$ 於 P,Q 兩點，試求弦$\overline{PQ}$的中點 M 的軌跡方程式。(10 分)

八. 若 a、b、c 爲任意實數且滿足 $|a|<1,|b|<1,|c|<1$, 試證 $ab+bc+ca+1>0$。(10 分)

九. (1) 若 α，β，γ 爲三次多項式 $p(t)=t^3+pt^2+qt+r$ 的三個根，試求 α，β，γ 與 p，q，r 之間的關係。(5 分)

(2) 若實數 x,y,z 滿足 $x+y+z=a$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$，試證 x,y,z 三數中必有一數等於 a。(5 分)

十. 若三角形△ABC 的三邊分別爲 a,b,c，且外接圓的半徑爲 R。

(1) 試證 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$。(5 分)

(2) 令 p,q 分別表示過△ABC 的點 A 且分別和 $\overline{BC}$ 相切於點 B 和點 C 的兩個圓的半徑。試證 $pq=R^2$。(5 分)

十一. 若 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 爲複數且滿足

$$z_1+z_2+z_3+z_4+z_5\neq 0,\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=|z_5|=3,$$

試求 $\left|\dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}+\frac{1}{z_5}}{z_1+z_2+z_3+z_4+z_5}\right|$ 之值。(10 分)