88學年度大學推薦甄試考題

88.3.19

回答下列問題並儘可能寫下你的理由:

(題目共六大題 17 小題)

(一)假設你已知道和角公式 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，試回答下列 1-4 的問題:

1. (6 分)推導公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

2. (4 分)推導公式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha$；

3. (3 分)推導公式 $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$；

4. (5 分)若 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 為方程式 $x^2+3x-1=0$ 之兩根，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 之值。

(二)回答下列 5-9 的排列問題:

5. (4 分)黑白兩色牌取五張排成一列有幾種排法；

6. (4 分)三張黑色兩張白色牌排成一列有幾種排法；

7. (4 分)我們定義一排列的變色數為相鄰不同色發生的次數，如:“黑白白白白”的變色數為 1，“白黑白白白”的變色數為 2，以 $f(n,k)$ 表所有變色數為 k 的 n 張黑色或白色牌的總共可能排列情形，如 $f(5,0)=2$，求 $f(2,1)$、$f(3,1)$、$f(7,7)$、$f(3,2)$；

8. (3 分)驗證 $f(4,2)=f(3,2)+f(3,1)$；

9. (5 分)求 $f(7,3)$。

(三)回答下列 10-12 關於直角座標上面積與體積的問題:

10. (3 分)劃出四直線 $y=x+1, x=5, x=7, y=0$ 所圍成的區域

並求其面積；

11. (6 分)利用公式"圓錐體積等於三分之一底面積乘以高"，

求上面區域對 x 軸旋轉所成旋轉體的體積；

12. (6 分)求過 $(5,6),(7,8)$ 兩點的線段對 x 軸旋轉所劃過區域的

面積。

(四)13. (10分) 假設 $|x|<2$. 試證: $|x^2-3x+2| \le 4|x-1|$.

14. (10分) 試找一正實數 c, 使得

當 $|x-1|<c$ 時, $|x^2-3x+2|<0.01$.

(五)15. (10分) 試證: 對任何正整數 n 與 k, $k^n<(k+1)^n$ 恆成立.

(六) 假設 p,q 爲二個實數.

16. (10分) 試求一 2×2 矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 使得

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+p^2 & 0 \\ 0 & 1+q^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. (10分) 試求一 2×2 矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 使得

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+p^2 & pq \\ pq & 1+q^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$