國立交通大學應用數學系
八十七學年度推薦甄選入學

說明：共七題，合計100分。　　　　　　　　　　　　　　民國87年3月20日

1. (14%)令$f(x)$爲一實係數多項式。

   a) 若$f(x)$除以$x-1$餘 6，除以 x^2-x+2 餘 $7x-3$，則$f(x)$除以$(x-1)(x^2-x+2)$ 的餘式是什麼？

   b) 若$(x+1)f(x)$除以x^2+x+3餘 $5x+6$，則$f(x)$除以 x^2+x+3 的餘式是什麼？

2. (14%)

   a) 求$\tan 30^\circ$之值。

   b) 利用和角公式$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$，求$\tan 15^\circ$之值。

   c) 考慮將-90°到90°之間的第I、IV象限等分成12份，試說明分佈於第I、IV象限裡的13個角度，必有兩個其差不超過15°。

   d) 試證明在任意13個相異實數裡，必存在有兩個數x和y滿足$0<(x-y)/(1+xy)\le 2-\sqrt{3}$的不等式。

3. (14%)令a，b，c，d爲正整數且滿足$a^5=b^4$，$c^3=d^2$的關係。

   a) 試說明存在整數 m，n 使得$a=m^4$，$b=m^5$，$c=n^2$，$d=n^3$。

   b) 若 $c-a=19$，求出 $d-b$ 之值。

4. (14%)用$C(a,b;r)$表示平面上以(a,b)爲圓心，以r爲半徑的圓，即方程式爲$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的圓。

   a) 分別求出兩圓$C(a,b;r)$，$C(c,d;s)$互爲內切，或外切的條件。

   b) 考慮所有和圓$C(0,0;3)$內切，並且和圓$C(1,0;1)$外切的所有圓$C(x,y;r)$的圓心(x,y)所組成的軌跡。

5. (14%)令n，k爲大於或等於3的整數，考慮 $n(n-1)^{k-1}$，例如

n	k	$n(n-1)^{k-1}$
3	3	$3\cdot 2^2=2+4+6$
5	4	$5\cdot 4^3=60+62+64+66+68$
6	4	$6\cdot 5^3=$ ___ + ___ + ___ + ___ + ___ + ___

   a) 試將$750=6\cdot 5^3$表爲6個連續偶數之和。

   從前述數據裡，我們發現當$(n,k)=(3,3),(5,4),(6,4)$時，$n\cdot(n-1)^{k-1}$均可表爲n個連續偶數之和，上述命題是否對一般的(n,k)均能成立?

b) 試求出$2a, 2a+2, 2a+4, \cdots, 2a+2(n-1)$等n個連續偶數之和。

c) 能否找到一個整數a，使上面的數列之和為$n(n-1)^{k-1}$?

d) 前述命題是否可以推廣到更廣泛的情況?

6. (15%)一個4 × 4的方陣裡的每一個方格，若用"+"號，或"−"號來填入，共有2^{16}種填法，其中的三個如下所示:

+	+	−	−
−	−	+	+
−	+	−	−
−	−	+	+

(甲)

+	−	−	−
+	+	−	−
+	+	−	−
+	+	−	−

(乙)

+	+	−	+
+	−	−	+
+	+	+	+
+	−	+	−

(丙)

考慮這些填法間的如下轉換(T):

(T):把某一行(或列)上各方格變號，也就是把"+"號變為"−"號，把"−"號變為"+"號。

a) 是否可以經過有限次的轉換(T)，把(甲)轉換為(丙)?
(用(甲)$\xrightarrow{(T)}$(丙)表示可以的情況)。

b) 是否(乙)$\xrightarrow{(T)}$(丙)也能成立?

c) 有多少種不同的方陣填法，可以經過前述的轉換而成為(丙)?

7. (15%)令集合$X=\{1,2,3,4,5,6,7\}$。

a) 集合X有幾個非空的子集合?

若$A \subseteq X$，將A的元素由大到小排列，並在其間交錯植入"+"號和"−"號，所得之值稱為A的"交錯和"，以符號$S(A)$表示。例如集合$B=\{1,2,4,6,7\}$的交錯和為$S(B)=7-6+4-2+1=4$，集合$C=\{5\}$的交錯和為$S(C)=5$。

b) 在集合X的所有非空子集合裡，最大、最小的交錯和分別是多少? 那些數是可能的交錯和?

c) 所有X的非空子集合的交錯和的總和是多少?

d) 試將在前述a)，b)和c)的結論推廣到集合$\{1,2,\cdots,n\}$上。