

# 86學年度大學推甄考題

請注意：(1)請依題號順序作答

(2)計算題要有計算過程才能得分

1997.3.21

(一)、已知實數  $a > 0, b > 0$  且滿足  $a^2b + ab^2 = 2$ 。試證  $a + b \geq 2$ 。(10%)

(二)、對任意正整數  $n \geq 1$ ，令  $P_n$  表示命題“若  $x_1, x_2, \dots, x_n$  為任意非負的  $n$  個實

數且滿足  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$ ，則  $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n) \geq \frac{1}{2}$ ”，試用數學歸

納法證明  $P_n, n = 1, 2, \dots$  恆成立。(10%)

(三)、如圖 1, 圖 2 所示，設  $\widehat{AB}$  為半徑為  $r$ 、圓心為  $O$  的圓上的一段定弧，其中  $0 < \theta = \angle AOB < \pi$ ，令  $P$  為  $\widehat{AB}$  上的任一點，由點  $P$  作  $\overline{PQ} \perp \overline{OA}$ ， $\overline{PR} \perp \overline{OB}$ ，試證線段  $\overline{QR}$  之長度恆為一常數。(10%)

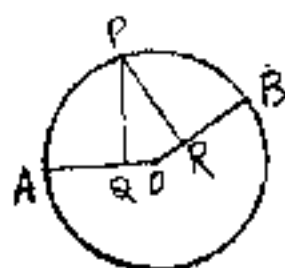


圖 1

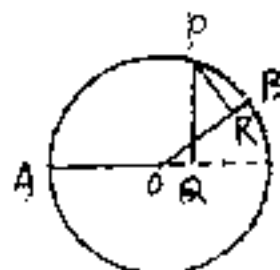


圖 2

(四)、給定空間上的二條直線  $\ell_1: \frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{2}$ ； $\ell_2: x-1 = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ ，試判別  $\ell_1$  與  $\ell_2$  是否相交？若相交，試求其交點的座標；若不相交，試求  $\ell_1$  與  $\ell_2$  的距離。(10%)

(五)、如圖 3 所示，設  $P$  為拋物線  $y = x^2$  在第一象限內的任一點， $PB$  平行於  $X$  軸且交  $Y$  軸於點  $B(0, b)$ ，過點  $P$  作  $y = x^2$  的切線  $PA$  交  $Y$  軸於點  $A$ ，令  $S(b)$  表  $y = x^2, y = b, x = 0$  所圍區域(即  $\int_0^{\sqrt{b}} x^2 dx$ )的面積，令  $T(b)$  表三角形  $\triangle APB$  的面積，試證  $\frac{S(b)}{T(b)}$  恆為一常數。(10%)

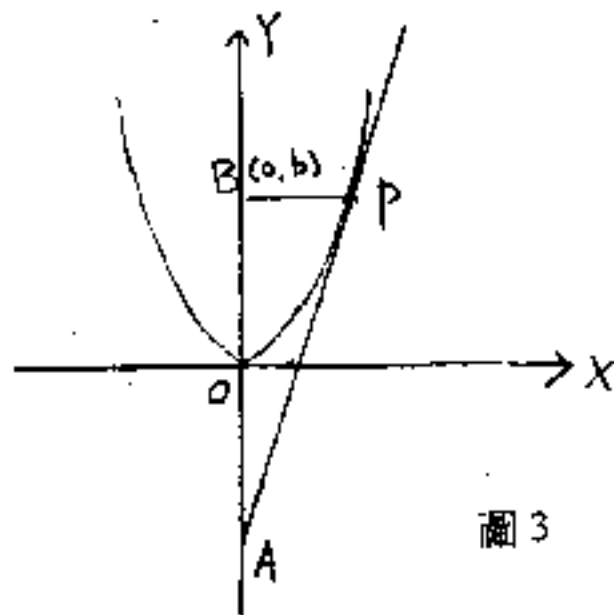


圖 3

(六) 令  $N$  為自然數集合,  $N \times N = \{(x, y) | x, y \in N\}$ 。

① 請描述一個函數  $f: N \rightarrow N \times N$  以證明  $N \times N$  是可數集。(5%)

② 若  $f(n) = (100, 100)$ , 求  $n = ?$  (2%)

③ 若  $f(100) = (x, y)$ , 求  $x = ? y = ?$  (3%)

(七) 已知  $z + \frac{1}{z} = -1$ , 求  $z^{1997} + \frac{1}{z^{1997}} = ?$  (10%)

(八) 令  $1 \leq i \leq n$ , 袋中有  $i$  號球  $(i+1)$  個。自袋中任取一球, 若得  $r$  號球, 可得  $(n-r+1)$  元, 求期望值為多少? (10%)

(九) ① 已知  $A, B$  兩定點在直線  $L$  之同側, 在  $L$  上找一點  $P$ , 使得  $AP+PB$  最小。(2%)

② 令兩定點  $A, B$  落在  $x-y$  直角座標平面的第一象限內, 利用①的做法, 描述如何在  $y$  軸上取一點  $P$ , 與在  $x$  軸上取一點  $Q$ , 使得  $AP+PQ+QB$  最小? (8%)

(十) 已知  $a > b > 0, c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , (如下圖 4)  $P, Q, R$  分別為  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上三點;  $R$  的  $x$  座標為  $c$ ;  $D, E, F$  分別為  $P, Q, R$  在  $x$  軸上的垂足, 證明:  
“ $DF=EF$  若且唯若  $PF \cdot RF = RF \cdot QF$ ” (10%)

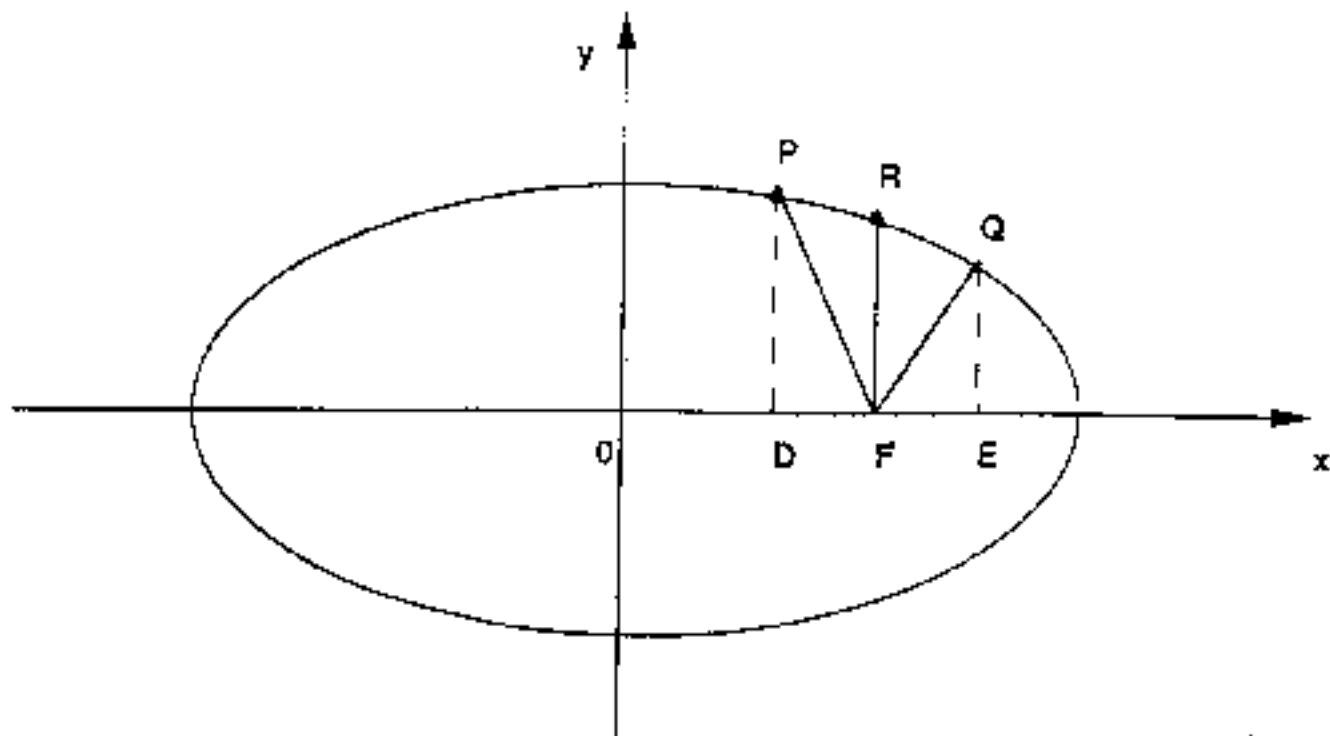


圖 4