

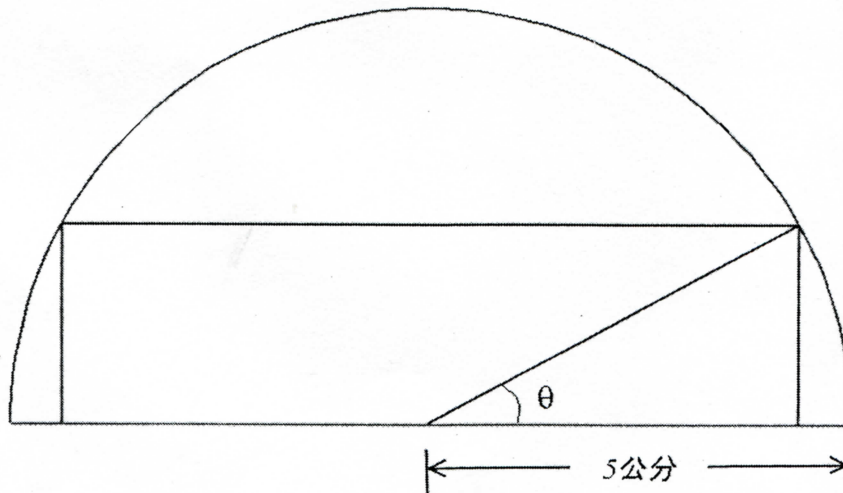
國立交通大學應用數學系

一百零三學年度大學甄選申請入學考試試題

說明：

- (1) 本試卷共五題計算證明題，總分共計 100 分。測驗時間為 110 分鐘。
- (2) 答題時，請仔細寫下解題與計算過程。若只寫答案，則該題不予計分。
- (3) 請依題號順序作答。
- (4) 繳卷時請同時繳回題目卷。

第一題 設一矩形內接於一半徑為 5 公分的半圓，如下圖：



- (1) (6 分) 請證明此矩形的面積是 $A(\theta) = 25 \sin 2\theta$ 。
- (2) (6 分) 請求出此內接矩形之最大可能面積。
- (3) (8 分) 請問此最大可能面積之內接矩形的長與寬各為多少？

第二題

(1) (4 分) 已知實數 x, y 滿足 $|x + y| + (2x - y - 10)^2 = 0$ 。求 x, y 之值。

(2) (6 分) 設 a, b, c 為實數且滿足條件 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 。求證 $a = b = c$ 。

(3) (8 分) 描繪函數 $f(x) = |x| + |x - 1| + |x - 2|$ 之圖形。其中自變數 x 之取值範圍為所有實數。(必須簡要說明作圖之依據。)

(4) (2 分) 利用 (3) 之結果。解不等式 $|x| + |x - 1| + |x - 2| > 3$ 。

第三題 假設 $\{a_n\}$ 是一個數列滿足底下條件：

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{3 - a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(1) (6 分) 請寫出 a_2, a_3, a_4 的值。並猜測對於一般的正整數 n 。 a_n 的值。

(2) (6 分) 請驗證你在 (1) 的猜測。

(3) (8 分) 求 $\frac{a_2 \cdot a_3}{1 \cdot 2} + \frac{a_3 \cdot a_4}{2 \cdot 3} + \frac{a_4 \cdot a_5}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{a_{99} \cdot a_{100}}{98 \cdot 99}$ 的值。

第四題 令 N, J, P 與 A 為下列 3×3 矩陣

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I + N,$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = P J P^{-1}.$$

(1) (2 分) 試驗證 P 之逆矩陣為

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(2) (4 分) 證明

$$N^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(3) (8 分) 計算 J^6 ，解釋你的算法。

(4) (6 分) 計算 A^6 ，解釋你的算法。

第五題 考慮一個丟銅板的實驗，其對應的隨機變數為 X 。若出現正面，則令 X 記為 1，若出現反面，則令 X 記為 0。此銅板出現正面的機率為 p 。當骰子為公平的，則 $p = 0.5$ 。此隨機變數 X 的機率分布成為是一個白努力分布。其機率質量函數為 $P(X = 1) = p$ ， $P(X = 0) = 1 - p$ 。

現在考慮我們重複並且獨立的進行丟銅板的實驗，令 X_i 表示第 i 次的結果。

(1) (5 分) 令 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ，請問 Y 可能的值為多少？並請寫下

Y 機率質量函數。

(2) (5 分) 假設骰子為公平的，也就是 $p = 0.5$ ，且 $n = 100$ ，請估計

$P(Y \leq 45)$ 。

(3) (5 分) 若重複此實驗 100 次，只有 20 次出現正面，也就是 $n = 100$ ，

$Y = 20$ 。試寫下 p 的 95% 信心水準下的信賴區間。

(4) (5 分) 承上題 (3)，你覺得這個銅板是公平的嗎？請解釋理由。