

國立交通大學應用數學系 102 學年度大學申請入學

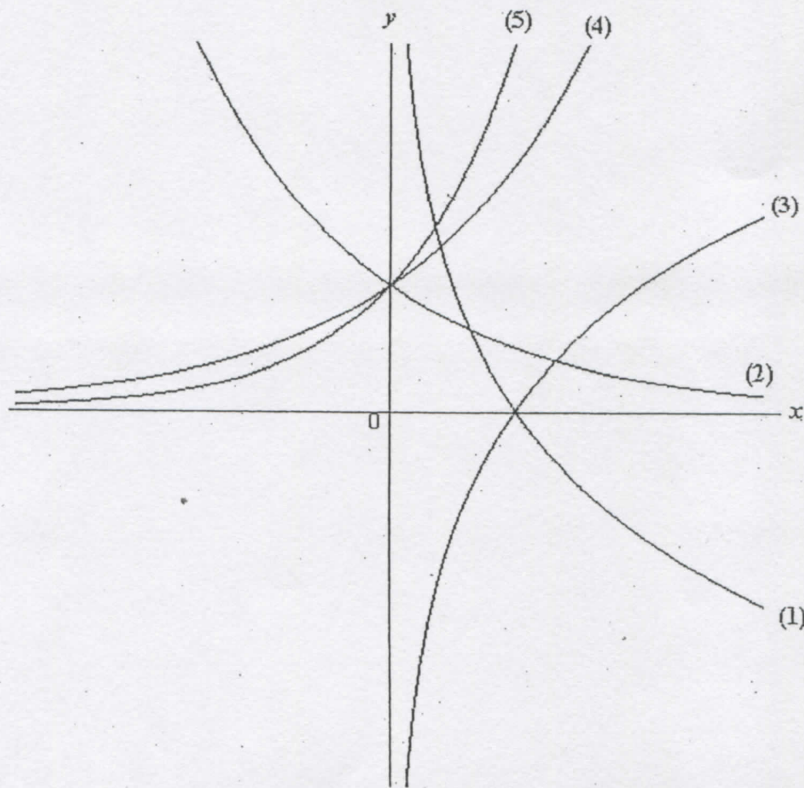
數學科筆試

說明：

- (1) 答題前，請先檢查答案本封面上之編號是否與座位上之編號相符。
- (2) 本試卷共有六大題（三頁試題），總分共計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。
- (3) 作題時，必須要寫下計算過程，若是僅有答案，則該題不予計分。

第一題 (15 分)

- (1) (6 分) 試由下列圖形中找出 $y = 2^x$, $y = 3^x$ 的圖形，並說明理由。



- (2) (9 分) 已知圖 (3) 和圖 (4) 對稱於 $y = x$ ，圖 (3) 和圖 (1) 對稱於 x 軸，圖 (2) 和圖 (4) 對稱 y 軸，試求出所有圖形所對應的方程式，並說明理由。

第二題 (20 分)

(1) (6 分) 若聯立方程式組

$$\begin{cases} ax + 2y = a \\ x + by = b \end{cases}$$

有無限多組解，則 a, b 的值為何？

(2) (6 分) 承上題，若二階矩陣 A, B 滿足

$$A + B = \begin{pmatrix} 2a - 3b & -a + b \\ -b & a - 3b \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} a - 1 & b \\ a - b & a - 3 \end{pmatrix}$$

求 $A^2 - B^2$ 。

(3) (8 分) 試判斷下列命題是否成立，請給出該判斷之理由。

若二階矩陣 C, D 滿足 $C^2 = D^2$ ，則 $C = D$ 或 $C = -D$ 。

第三題 (15 分)

(1) (6 分) 在 $\triangle ABC$ 中，頂點 A, B, C 之三對邊長分別為 a, b, c ，試判斷下列命題是否成立，請給出該判斷之理由。

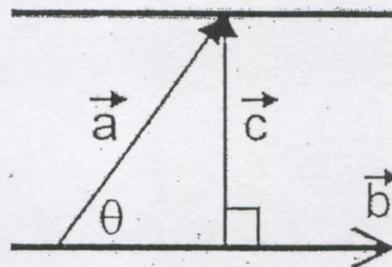
(i) $\sin A + \sin B > \sin C$ 。

(ii) 若 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ ，則 $\triangle ABC$ 是直角三角形。

(2) (9 分) 平面上圓 $x^2 + y^2 = 8$ (以原點 O 為圓心，半徑為 $2\sqrt{2}$ 的圓)，點 A 座標為 $(0, 2)$ ，動點 B 在圓上，請問 $\angle OBA$ 最大值為何？

第四題 (15 分)

(1) (5 分) 已知 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$ ，證明： $\vec{c} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ 。



(2) (10 分)

$$L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-7}{-4}, \quad L_2: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -5 + t \\ z = -2 - 4t \end{cases}$$

僅利用上式求兩平行直線之間的距離？

第五題 (15 分)

假設 $\{a_n\}$ 是一個數列滿足底下條件：

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \frac{a_{n+1} - a_n}{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + a_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

(1) (5 分) 令 $\tilde{a}_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n a_n$ 當 $n \geq 1$ 。

證明： $\frac{\tilde{a}_{n+1} - \tilde{a}_n}{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ 。

(2) (5 分) 證明： $\tilde{a}_n = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{1}{4}\right)^{j+1}$ 當 $n \geq 1$ 。

(3) (5 分) 證明： $a_n \leq \frac{1}{10} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ 。

第六題 (20 分)

阿松參加某抽獎活動。獎項有頭獎 (3000 元)，二獎 (1000 元)，三獎 (500 元)，及普獎 (100 元)。總共有兩個抽獎箱：

A 箱中有頭獎 1 個，三獎 2 個，普獎 22 個

B 箱中有二獎 3 個，三獎 4 個，普獎 18 個

獎品抽出後不再放回。

(1) (4 分) 假設阿松是第一個抽獎，有兩個抽獎機會且必須由兩個抽獎箱各抽出一個。請問阿松得到獎金的組合有幾種？

(2) (8 分) 假設阿松是第一個抽獎，有兩個抽獎機會且必須從同一個抽獎箱中抽出兩個。試問阿松從這兩個抽獎箱得到獎金的期望值分別為多少？

(3) (8 分) 假設前面有 x 個抽獎機會均由 (2) 中期望值較低的抽獎箱中抽走而且這 x 個均為普獎。試問當 x 最少大於多少時，這個抽獎箱獎金的期望值會大於另一個？