

說明：

- (1) 答題前，先檢查答案本封面上之編號與座位上之編號是否相符。
- (2) 本試卷共有五大題（3 頁試題），總分共計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。
- (3) 作題時，必須要寫下計算過程，若是僅有答案，則該題不予計分。

第一題 (共 20 分) 試證下列兩個命題：

- (1) (10 分) 對任意整數 $n \geq 0$ ，任意實數 $x \geq -1$ ，下列不等式成立：

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

- (2) (10 分) 對任意整數 $n \geq 1$ ，下列不等式成立：

$$1 + \frac{2}{3n-2} \leq \sqrt[n]{3} \leq 1 + \frac{2}{n}$$

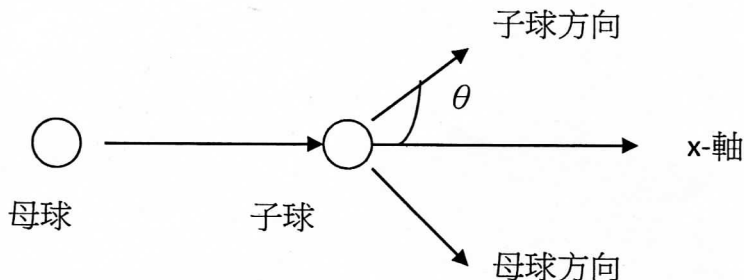
第二題 (共 20 分)

- (1) (8 分) 以 $\sin \theta$ 為底 $\cos \theta$ 的對數，根據不同角度 $0 < \theta < 90$ ，其值可表為：

$$\log_{\sin \theta} \cos \theta \in \begin{cases} (-\infty, 0], & \text{當 } \theta \in A \\ (0, 1), & \text{當 } \theta \in B \\ 1, & \text{當 } \theta \in C \\ (1, \infty), & \text{當 } \theta \in D \end{cases}$$

上式 A、B、C、D 是開區間 $(0, 90)$ 的子集合。試求 A、B、C、D。

- (2) (共 12 分) 假設撞球時，母球大約沿 x -軸下方往右撞擊相同質量位於原點的靜止子球，之後子球沿著與 x -軸逆時鐘夾角 θ 的方向前進，如附圖。假設撞擊為彈性碰撞，試回答下列問題：



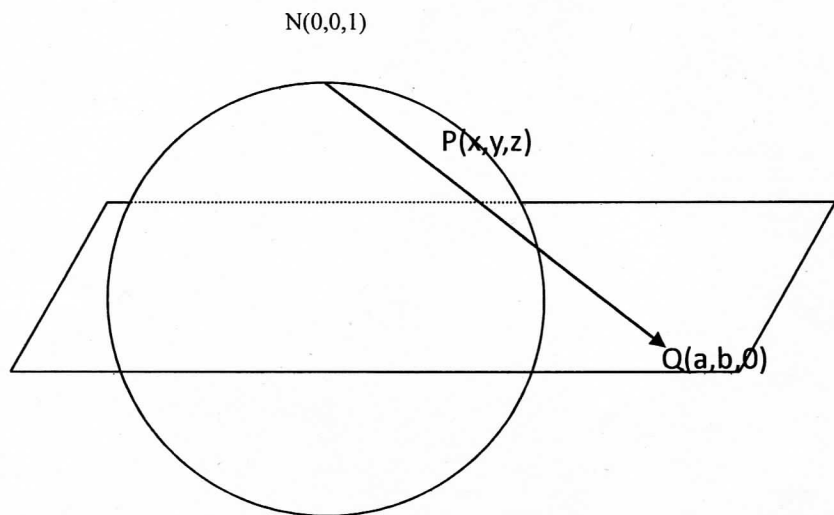
- (2a) (4 分) 利用方程式解釋為何不管母球初速及撞擊點為何，撞擊子球後，兩球前進方向之夾角永遠為 90 度。

(2b) (4分) 如撞擊前母球速度每秒 30 公尺, 撞擊後母球速度減半, 則子球與 x -軸之夾角 θ 是多少度? 請詳述理由.

(2c) (4分) 如果兩球半徑都是 4 公分, 且未出杆前母球靜止於座標 $(-16,0)$ 處, 求 θ 最大可能值? 請詳述理由.

第三題 (共 20 分) 設 S 為球面: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, E 為平面: $z = 0$. 設通過球面 S 上相異兩點 $N(0,0,1)$ 與 $P(x, y, z)$ 之直線與平面 E 相交於點 $Q(a,b,0)$.

如下圖:



命題:

(1) (5分) 給定球面 S 上一點 $P(x, y, z)$, $P(x, y, z) \neq N(0,0,1)$, 試求 a 與 b .

(2) (5分) 給定平面 E 上一點 $Q(a,b,0)$, 試求球面 S 上一點 $P(x, y, z)$, 使得其對應點為 $Q(a,b,0)$.

(3) (10分) 設 $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ 與 $B(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}, 0)$ 為平面 E 上兩點, Q 與 R 為在球面 S 上分別對應於 A 與 B 之兩點. 試求在球面 S 上所有連接 Q 與 R 兩點之最短曲線段長度(即 Q 與 R 之距離).

第四題 (共 20 分) 假設 A 與 B 為二階方陣且 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, a 與 b 均為實數且 $a \neq b$.

(1) (6分) 試證下列命題:

$$AB = BA \text{ 若且唯若 } B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, c \text{ 與 } d \text{ 為實數.}$$

(2) (6分) 設 C 為二階可逆方陣且 $H = CAC^{-1}$. 試證下列命題:

若 $HB = BH$ 則 $C^{-1}BC = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, c 與 d 為實數.

(3) (8分) 設 $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 與 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. 計算 $C^{-1}BC = ?$ 並求出 B^{100} .

第五題 (共 20 分) 小白參加一個抽獎活動. 現在箱中有一顆紅球、三顆黃球及六顆藍球. 抽中紅球可得 100 元, 黃球可得 30 元, 藍球可得 10 元. 小白現在有連續抽獎兩次的機會.

- (1) (6分) 假設球抽出後會再放回箱內, 小白平均會得到多少獎金?
- (2) (8分) 假設球抽出後不會再放回箱內, 小白平均會得到多少獎金?
- (3) (6分) 假設球抽出後不會再放回箱內且抽出紅球後抽獎就結束了, 那麼小白平均會得到多少獎金?