

國立交通大學應用數學系第 100 學年度大學甄選申請入學

數學科筆試

說明:

- (1) 答題前，請先檢查 答案本封面上之編號是否與座位上之編號相符。
- (2) 本試卷共有五大題（2 頁試題），總分共計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。
- (3) 作題時，必須要寫下計算過程，若是僅有答案，則該題不允許分。

第一題 (20 分)

求解以下聯立不等式

$$\begin{cases} (x+1)^3(x-1)^4(x-2)^5 \leq 0 \\ 6-x-x^2 > 0 \end{cases}$$

第二題 (20 分)

假設 n 為大於或等於 1 的正整數，考慮數列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。

- (1) (2 分) 請證明 $a_1 < a_2 < a_3 < 3$ 。
- (2) (8 分) 請利用二項式定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k y^{n-k}$ ，證明 $a_n < 3$ 對所有的 n 都正確。
- (3) (10 分) 請用數學歸納法證明二項式定理。

第三題 (20 分)

假設 $\tan(x/2) = u$ 。

- (1) (8 分) 試將 $\sin(x)$ 和 $\cos(x)$ 表示成 u 的函式。
- (2) (12 分) 試找出參數 α 使得方程式 $\sin(x) - 2\cos(x) = \alpha$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 區間中只有一個根並求出此根。

第四題 (20 分)

- (1) (4 分) 給出一個橢圓的方程式, 使得 $(0,1)$ 爲此橢圓之焦點且原點爲其頂點。
- (2) (6 分) 說明以 $(0,1)$ 爲焦點且原點爲頂點之拋物線恰有一個, 並求其方程式。
- (3) (10 分) 設 C_1 爲焦點在 $(0,1)$ 且原點爲頂點的拋物線, C_2 爲符合以 $(0,1)$ 爲焦點且原點爲頂點的任意橢圓。試問 C_1, C_2 二者之圖形是否有固定的相對關係? 若有, 請描述並清楚說明理由; 若無, 亦詳述理由。

第五題 (20 分)

5. 假設你下週要參加畢業旅行, 並要求你的鄰居幫你餵食你的熱帶魚。如果已知熱帶魚在沒有食物的情況下, 牠活過週末的機率是 0.3, 有食物的話則是 0.8. 假設你只有 60% 的機率確定你鄰居會幫你餵熱帶魚。
 - (1) (6 分) 當你回來的時候, 你的熱帶魚還活著的機率有多大?
 - (2) (6 分) 當你回來的時候, 發現你的熱帶魚已經蒙主寵召了。請問你鄰居忘了餵牠的機率有多大?
 - (3) (8 分) 若你鄰居在你回來前發現熱帶魚已經死了時, 會買一隻一模一樣的熱帶魚偷偷地放回魚缸裡的機率是 80 %。請問當你回來看見一隻活的熱帶魚時, 這條熱帶魚不是你原來的那條的機率有多大?

(答案請用分數表示, 不要寫成小數)