國立陽明交通大學應用數學系

114 學年度大學申請入學考試試題

說明：

(1) 答題前，請先檢查答案本封面上之編號是否與座位上之編號相符。

(2) 本試卷共六題計算證明題，總分共計 100 分。測驗時間為 100 分鐘。

(3) 答題時，必須寫下解題過程；若是僅有答案，則該題不予計分。

(4) 請依題號順序作答。

(5) 繳卷時，請同時繳回題目卷。

$\boxed{\text{第一題}}$ (17%)

假設在兔子交配的實驗，我們觀察到基因有兩種型態：G 或 g。每隻兔子擁有一對基因，可能為 GG（顯性）、Gg（雜合體，gG 和 Gg 等價）或 gg（隱性）。在兩隻兔子交配時，後代會以相等機率各自從上一代繼承一個基因。因此，例如將一隻顯性（GG）兔子與一隻雜合體（Gg）兔子交配，產生的後代有 1/2 的機率是顯性，1/2 的機率是雜合體。

從一隻已知基因型的兔子開始（GG、Gg 或 gg)，與一隻雜合體兔子交配，產生的後代再與另一隻雜合體兔子交配，重複進行多次，每一代都與雜合體兔子交配。

(1) (4%) 請寫出兔子實驗遺傳機率的轉移矩陣 P。(轉移矩陣 P 為 3×3 方陣，每一列代表目前基因型（依序是 GG、Gg、gg)，每一行代表下一代基因型（GG、Gg、gg)。矩陣的元素表示相應的轉變機率，各行元素之和為 1。)

(2) (5%) 假設初始已知的兔子基因為雜合體。令 μ_n 為 3×1 階的機率向量，表示第 n 代兔子的基因型機率分佈，

$$\mu_n = \begin{bmatrix} \mu_n(GG) \\ \mu_n(Gg) \\ \mu_n(gg) \end{bmatrix}$$

換言之，$\mu_n(GG)$、$\mu_n(Gg)$、$\mu_n(gg)$ 是第 n 代兔子基因為 GG、Gg、gg 的機率。試求 μ_1 與 μ_3。

(3) (8%) 請證明：對於任意正整數 $n \geq 2$，

$$P^n = 2^{-n} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + (2^{n-2} - 1) & 2^{n-2} & \frac{1}{2} + (2^{n-2} - 1) \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ \frac{1}{2} + (2^{n-2} - 1) & 2^{n-2} & \frac{3}{2} + (2^{n-2} - 1) \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{第二題}}$ (17%)

(1) (5%) 以下敘述是否正確？原因為何？

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{100}\right)^2 \le 10\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{10000}\right)$$

(2) (5%) 以下敘述是否正確？原因為何？

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{10000} \le \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{100}\right)^2$$

(3) (7%) 試判斷下列極限是否存在，若是則求極限值。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+\cdots+\frac{1}{n\times(n-1)}\right)^n.$$

[Hint: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 0$, which is the natural constant.]

$\boxed{\text{第三題}}$ (16%)

(1) (4%) 已知 $\sin\theta + \cos\theta = -1$，試求

$$\sin^{2025}\theta + \cos^{2025}\theta$$

可能的值。

(2) (6%) 已知 $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ 和 $\cos\alpha + \cos\beta = 0$，試求

$$\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

的值。

(3) (6%) 已知 x 是弧角並滿足 $0 \le x \le \pi$，請求出

$$f(x) = \sqrt{4\cos^2 x + \sin^4 x} - \sqrt{4\sin^2 x + \cos^4 x}$$

的最大值與最小值，以及取得這些值的 x。

$\boxed{\text{第四題}}$ (17%)

(1) (6%) 已知方程式 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 有一個根是 $x=2$，請求出 a 的值，以及方程式其它的根。

(2) $a>0$，假設已知函數 $f(x)=\dfrac{2^x}{a}+\dfrac{a}{2^x}$ 是偶函數。

(i) (5%) 請求出 a 的值。

(ii) (6%) 請證明 $f(x)$ 在 $x>0$ 時是遞增函數，亦即對所有的 $0<x_1<x_2$，$f(x_1)<f(x_2)$。

$\boxed{\text{第五題}}$ (16%)

已知在 x-y 平面直角座標中有一橢圓的中心在 $(0,0)$，長軸在 x 軸上長度是 $\sqrt{5}$，短軸在 y 軸上長度是 2。

(1) (3%) 寫出此橢圓的標準式。(以 x、y 表示的方程式)

(2) 若將此平面座標系統以複數 z 表示 ($z = x + yi$，i 是虛數)：

   (a) (6%) 寫出此橢圓的複數表示式。(該方程式中只能出現 z，不能有 x、y)

   (b) (7%) 將 $z = x + yi$ 代入上式 (a)，詳細列式以驗證確實能將其轉換並化簡成上式 (1)。

$\boxed{\text{第六題}}$ (17%)

驗證「拋物面反射鏡的平行光原理」：所有由焦點射出的光線被拋物面鏡反射後皆會平行其對稱軸。利用拋物面的對稱性，可以將問題簡化，以下只要證明在 x-y 平面上的拋物線也有此特性即可。

已知一焦點為 F 的拋物線 $y = \frac{1}{4C}x^2$，$C > 0$ 為一常數，其上任一點 P 座標 $(2Ct, Ct^2)$，t 為參數。拋物線在 P 的切線為 T_P，其與直線 $\overline{FP}$ (入射光) 的夾角為 α，通過 P 與對稱軸 (y 軸) 平行的直線為 L_P (反射光)，其與 T_P 的夾角為 β：

(1) (4%) 寫出 $\overrightarrow{FP}$ 向量。(以符號 C、t 表示)

(2) (4%) 寫出 T_P 的方程式。

(3) (9%) 各取一 L_P、T_P 上的向量 (要明確寫出)，連同 $\overrightarrow{FP}$ 向量做內積計算，詳細列式以證明 $\cos\ (\alpha) = \cos\ (\beta)$。(也就是 $\alpha = \beta$ 入射光與反射光夾角相同)