國立陽明交通大學應用數學系

112 學年度大學申請入學考試試題

說明：

(1) 答題之前請先檢查所取得之答案卷是否正確。

(2) 本試卷共五題計算證明題，總分共計 100 分。測驗時間為 100 分鐘。

(3) 答題時，請仔細寫下解題與計算過程。若只寫答案，則該題不予計分。

(4) 請依題號順序作答。

(5) 繳卷時請同時繳回題目卷。

第一題 (20%)

(1) (7%) 假設 $f(x)$ 是一實係數的多項式，請求出所有滿足關係式 $f(x^2) = (f(x))^2$ 的多項式。

(2) (7%) 假設 $f(x)$ 是一實係數的多項式，請求出所有滿足關係式 $(f(x))^2 = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ 的多項式。

(3) (6%) 假設 k 是一固定的正整數，$f(x)$ 是一實係數的多項式，請求出所有滿足關係式 $(f(x))^k = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ 的多項式。

第二題 (20%)

設 $f : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$ 是一個函數且對任意實數 x, y 滿足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 和 $f(xy) = x f(y)$。

(1) (4%) 求 $f(0)$ 的值。

(2) (6%) 證明 $f(x)$ 的導函數 $f'(x) = f(1)$。

(3) (10%) 若 $f'(0) = 1$，試求函數 $f(x)$ 並計算定積分 $\int_{-1}^{3} |f(x) - 2| dx$。

$\boxed{\text{第三題}}$ (20%)

考慮以下多項式數列的遞迴關係式

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

(1) (2%) 若 $T_0(x) = 1$ 以及 $T_1(x) = x$，試求 $T_2(x)$ 以及 $T_3(x)$。

(2) (8%) 若 $T_0(x) = 1$ 以及 $T_1(x) = x$，試求出 $T_n(x)$ 在 $x = 0$ 以及 $x = -1$ 的通式。

(3) (2%) 若 $T_0(x) = 1$ 以及 $T_1(x) = 2x$，試求 $T_2(x)$ 以及 $T_3(x)$。

(4) (8%) 若 $T_0(x) = 1$ 以及 $T_1(x) = 2x$，試證明 $T_n(1) = n + 1$。

$\boxed{\text{第四題}}$ (20%)

(1) (5%) 假設 a 是一給定的實數並滿足 $0 < a < 1$，如果 $a^{\sin 2\theta} < 1$，請問 θ 是第幾象限角？

(2) (5%) 假設 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$，且滿足不等式 $\tan\alpha < \cot\beta$，試求出 $\alpha + \beta$ 的上界。

(3) (5%) 假設在三角形 ΔABC 中，$BC = \sqrt{5}$，$AC = 3$，$\sin\angle BCA = 2\sin\angle CAB$，請求出三角形 ΔABC 的面積。

(4) (5%) 假設三角形 ΔABC 的內角滿足 $\cos(\angle CAB - \angle BCA) + \cos\angle ABC = \frac{3}{2}$ 的關係式，而內角 $\angle CAB$、$\angle ABC$ 和 $\angle BCA$ 的對邊分別是 a、b 和 c 滿足 $b^2 = ac$ 的關係式，請問 $\angle ABC$ 等於多少？

$\boxed{\text{第五題}}$ (20%)

(1) (4%) 若二元一次方程組

$$\begin{cases} tx + (1-t)y = 2t \\ (1-t)x + ty = a \end{cases}$$

有無限多組解，則 t, a 的值為何？

(2) (8%) 試以 t 的值討論三元一次方程組

$$\begin{cases} tx + (1-t)y + z = 0 \\ (1-t)x + ty + tz = 0 \end{cases}$$

的解。

(3) (4%) 設 t 為實數，令 $A_t = \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix}$。若 t_1, t_2 為實數，證明存在實數 t_3 滿足 $A_{t_1}A_{t_2} = A_{t_3}$。

(4) (4%) 續上題，試求 $(A_{2/3})^{100}$。