國立陽明交通大學應用數學系
一百一十一學年度大學甄選申請入學考試試題

說明:

一、 答題前請先檢查答案本封頁上之編號是否與座位上之編號相符。

二、 本試卷共兩頁，內含五大題計算證明題，每題 20 分，總計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。

三、 作答時，請務必寫下計算過程，若僅有答案該題將不予計分。

四、 答案本請依題號順序填寫。

五、 繳卷時請將題目卷一併繳回。

第一題

(a) (5 分) 以下敘述是否正確? 原因為何?

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)^2 \leq 9\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}\right).$$

(b) (5 分) 以下敘述是否正確? 原因為何?

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2} \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)^2.$$

(c) (10 分) 求下列方程式的解。

$$x^{2\log_{10} x}-20x^{\log_{10} x}+100=0.$$

第二題 在座標平面上，令 $O=(0,0)$、$A=(1,\sqrt{3})$、$B=(1-2\sqrt{3},2+\sqrt{3})$。

(a) (5 分) 計算 ΔOAB 的面積。

(b) (5 分) 固定 O 點，將 ΔOAB 順時鐘旋轉 15°，之後再將此三角形等比例放大，使得新的三角形每邊邊長為原先三角形邊長的 2 倍而得到 $\Delta OA'B'$，其中 A 轉成 A'，B 轉成 B'，$\overline{OA'}=2\overline{OA}$，$\overline{OB'}=2\overline{OB}$，$\overline{A'B'}=2\overline{AB}$。計算 $\Delta OA'B'$ 的面積。

(c) (10 分) 承上題，寫出點 B' 的座標表示式。

第三題 若 $a<b$，定義 $\min\{a,b\}=a$。設 c 為實數，令 $f_c(x)=\min\{(x-c)^2,(x-c-2)^2\}$，然後定義函數 $g(c)=\int_0^1 f_c(x)dx$。試問：

(a) (5 分) 求兩個二次函數 $y=(x-c)^2$ 和 $y=(x-c-2)^2$ 的交點座標。

(b) (7 分) $g(c)$ 在 $c=-1$ 是否連續? 請說明理由。

(c) (8 分) 求 $g(c)$ 在區間 $[-2,0]$ 上的最大值和最小值。

$\boxed{\text{第四題}}$ 假設 a,b,c,d 均為實數，二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$。定義 $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\det(M)$ 是矩陣 M 的行列式。令 $g(x)=\det(A-xI_2)=x^2+k_1x+k_2$。

(a) (4 分) 試驗證 $k_1=-(a+d)$ 和 $k_2=ad-bc$。

(b) (10 分) 試證下列命題:
若 $\det(A-xI_2)=(x-\alpha)(x-\beta)$，$\alpha$ 與 β 均為實數且 $\alpha\neq\beta$，則存在二階可逆方陣 B 滿足 $B^{-1}AB=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$。

(c) (6 分) (承上題 (b)) 假設 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，試驗證存在二階可逆方陣 B 滿足 $B^{-1}AB=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ 且找出 α,β 和 B。

$\boxed{\text{第五題}}$ 數線上的整數點住著一隻青蛙（名叫呱吉），身上帶著一枚公平硬幣（出現正反面的機率各為 $1/2$）。每天晚上呱吉 會投擲硬幣來決定明天要去的地方。如果前一晚投擲出正面，則第二天早上呱吉 會向正方向移動一個單位，反之則往負方向移動一個單位。舉例來說，如果呱吉 昨晚的座標是 2，則今晚的座標可能在 1 或 3，機率各為 $1/2$。假設呱吉 每天投擲硬幣的結果彼此獨立。

令 n 為一非負整數，X_n 為第 n 天晚上呱吉 的座標，T_n 為第 1 天至第 n 天中，呱吉 在晚上的座標為 0 的天數。假設 $X_0=0$。

(a) (6 分) 請問 $X_n=0$ 的機率為何?

(b) (8 分) 在 $X_6=0$ 的前提下，$T_6=2$ 的機率以及 T_6 的期望值各為何?

(c) (6 分) 假設呱吉 在第 0 天早上撿到另一枚硬幣（出現正面的機率是 $1/4$），接著在每晚投擲硬幣決定第二天的去向時，會先隨機（機率各為 $1/2$）從兩枚硬幣中挑一枚，然後再開始投擲硬幣。如果挑選硬幣與投擲硬幣彼此獨立，則前一題的答案為何？