

國立交通大學應用數學系
一零八學年度大學甄選申請入學考試試題

說明:

- 一、答題前請先檢查答案本封頁上之編號是否與座位上之編號相符。
- 二、本試卷共兩頁，內含五大題計算證明題，每題 20 分，總計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。
- 三、作答時，請務必寫下計算過程，若僅有答案該題將不予計分。
- 四、答案本請依題號順序填寫。
- 五、繳卷時請將題目卷一併繳回。

第一題

(a) (7 分) 若 $a_1, \dots, a_{10}, b_1, \dots, b_{10}$ 為實數，則下列不等式是否正確? 原因為何?

$$\left(\sum_{i=1}^{10} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{10} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{10} b_i^2 \right).$$

(b) (7 分) 若 a, b 皆為正數，且 p 大於 1，則下列不等式是否正確? 原因為何?

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

(c) (6 分) 若 a, b 皆為正數，則下列不等式是否正確? 原因為何?

$$\log_{10} \frac{a+b}{2} \geq \frac{\log_{10} a + \log_{10} b}{2}.$$

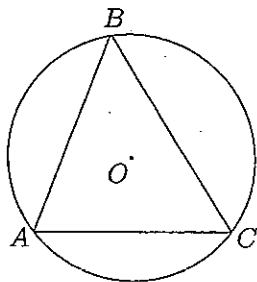
第二題

(a) (6 分) 請證明三角形的三個內角和為 180° 。

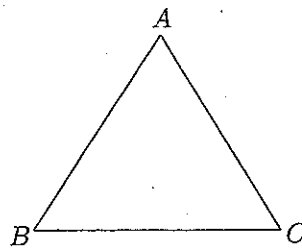
(b) (7 分) 如圖一，三角形 ABC 為圓 O 之內接三角形。令 R 為圓 O 之半徑， a 為 \overline{BC} 的長。請證明

$$\frac{a}{2R} = \sin \angle BAC.$$

(c) (7 分) 如圖二，令 a, b, c 為 $\angle A, \angle B, \angle C$ 對邊的長。請證明 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$ 。



(圖一)



(圖二)

第三題 志明在數學期中考試嘗試解決下面的問題。

題目：假設動點 $P(x_0, y_0)$ 在橢圓曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上，
試求 P 到直線 $L: x + y + 7 = 0$ 的最大距離？

他的解法如下：因為動點 $P(x_0, y_0)$ 在橢圓曲線 Γ 上，所以， (x_0, y_0) 滿足下列方程式

$$(1) \quad \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1.$$

另外，根據點到直線的距離公式，可以寫出動點 P 到直線 L 的距離 d 為

$$(2) \quad d = \frac{|x_0 + y_0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x_0 + y_0 + 7|}{\sqrt{2}}.$$

利用科西不等式，可以推得下面關係式

$$(3) \quad \left(\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} + 7 \right) (4^2 + 3^2 + 7) \geq (x_0 + y_0 + 7)^2.$$

由式子(3)和(1)，我們可以得到

$$(4) \quad |x_0 + y_0 + 7| \leq 16.$$

最後，由式子(2)和(4)，我們可以推得 d 的最大值為 $\frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$ 。

了解志明對問題的解法後，發現他的答案並不正確，請回答下列問題。

- (8分) 請指出志明哪些步驟和想法是有錯誤的，並敘述其原因。
- (8分) 請用自己的解法幫助志明算出正確答案。
- (4分) 試求題目中動點 P 到直線 L 的最小距離。

第四題 已知平面上三點座標 $P_0(1, 1)$ 、 $Q_0(2, 1)$ 、 $R_0(1, 3)$ 和矩陣

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & a-1 \\ 3a-5 & a \end{pmatrix},$$

其中 a 是常數。假設 P_0, Q_0, R_0 經過矩陣 A 變換後座標分別為 P_1, Q_1, R_1 。依此類推， P_i, Q_i, R_i 經過矩陣 A 變換後座標分別為 $P_{i+1}, Q_{i+1}, R_{i+1}$ 。請回答下列問題。

- (4分) 假設矩陣 A 中常數 $a = 3$ ，試求三角形 $\triangle P_1 Q_1 R_1$ 的面積。
- (8分) 假設矩陣 A 中常數 $a = 1$ ，當 $i = 100$ 時，試求三角形 $\triangle P_i Q_i R_i$ 的重心座標。
- (8分) 如果可以，試求所有常數 a 使得所有三角形 $\triangle P_i Q_i R_i$ 具有相同面積。如果不可以，請解釋原因。

第五題 某一池塘裡有兩片荷葉（分別為甲荷葉和乙荷葉），荷葉上各有一個銅板。有一隻青蛙白天時會待在荷葉上，入夜後會投擲該荷葉上的銅板一次。銅板出現正面時，青蛙隔天會待在同一片荷葉上，反之則待在另一片荷葉。假設甲乙銅板出現正面的機率分別為 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ ，投擲銅板的結果相互獨立，且青蛙第零天待在甲荷葉上。

- (5分) 請問青蛙在第一天至第十天中，會待在甲荷葉上至少九天的機率為何？
- (5分) 假設第 X 天為青蛙第一次出現在乙荷葉，則 X 的期望值為何？
- (10分) 令 p_n 為第 n 天青蛙待在甲荷葉的機率。請推導出 p_n 的遞迴表示式，並求出 p_n 的值。