

國立交通大學應用數學系

一百零四年度大學甄選申請入學考試試題

說明：

- (1) 本試卷共五題計算證明題，總分共 100 分。測驗時間為 100 分鐘。
- (2) 除多選題外，答題時請仔細寫下解題與計算過程。若只寫答案，則該題不予計分。
- (3) 請依題號順序作答。
- (4) 繳卷時請同時繳回題目卷。

第一題 便利商店近期推出 6 款航海王的公仔 (編號 1 至 6)。消費滿 100 元可參加一次抽公仔活動，滿 200 元可參加兩次，依此類推。抽公仔活動的籤筒中共有 6 支籤，編號為 1 至 6。進行的方式是在籤筒中抽出一支籤，籤上的編號即為公仔的編號。每次抽完籤後會將籤投回筒中，然後向店家領取一只和簽上編號相同的公仔。假設每支籤被抽中的機率相同，且每次抽籤結果相互獨立。

1. (4%) 香吉士目前已收集 3 款公仔，從現在開始抽籤平均還要抽多少次才能收集到第 4 款不同的公仔?
2. (8%) 娜美目前手中沒有任何公仔，她平均最少要花多少錢才能集滿全部 6 款公仔?
3. (8%) 騙人布到飲料店點了兩杯珍珠奶茶，其中一杯有 10 顆紅色珍珠，另一杯有 20 顆綠色珍珠。騙人布從紅色珍珠這杯開始喝，一次吸一顆珍珠。每次吸起一顆珍珠後立刻從另一杯撈一顆放進來，直到綠色珍珠都被撈完。接著他繼續把每顆珍珠吸起，直到杯中沒有任何珍珠。假設杯中每顆珍珠被吸起的機率相同，且每次吸珍珠的結果相互獨立。請問最後被吸起的珍珠是綠色的機率為何?

第二題 令 Y 為 1×4 矩陣, A 為 4×4 矩陣, X 為 4×1 矩陣, 並令

$$Y = [y_1, y_2, y_3, y_4], \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

1. (5%) 試解下列方程組, 求出其通解並令其解為 Y_s :

$$YA = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

2. (5%) 試解下列方程組, 求出其通解並令其解為 X_s :

$$AX = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. (5%) 給定 4×1 矩陣 B 。試證明方程組 $AX = B$ 有解的必要條件為 $Y_s B = 0$ 。

4. (5%) 給定矩陣 B 如下列, 試問方程組 $AX = B$ 是否有解? 若有解請給出其通解。

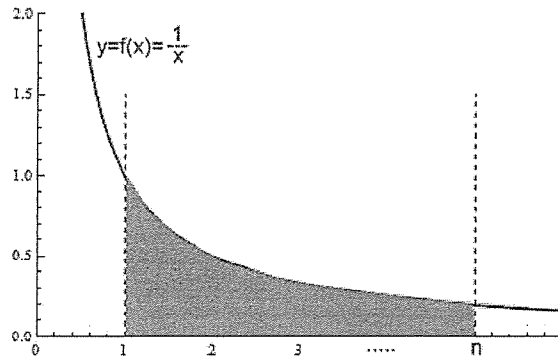
$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix},$$

第三題 令數列

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

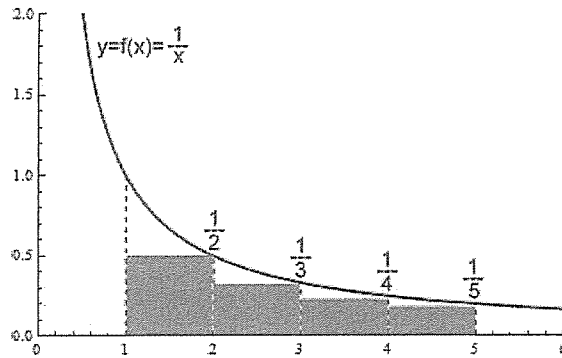
在這個題組，我們將證明 $0 < t_n \leq 1$ 且 t_n 是遞減數列。

已知公式（參考圖一）：由函數 $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$ 與 $x = n$ 所包夾的區域面積為 $\ln(n)$ 。



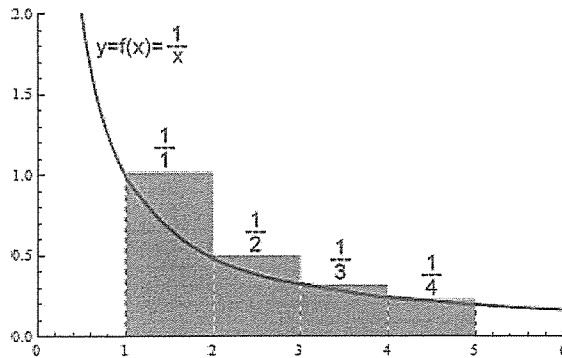
圖一

1. (6%) 由圖二（觀察各矩形區塊的面積）與圖一對照，比較 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 與 $\ln(n)$ 的大小，說明為何 $t_n \leq 1$ 。



圖二

2. (6%) 由圖三觀察並說明為何 $t_n > 0$ 。

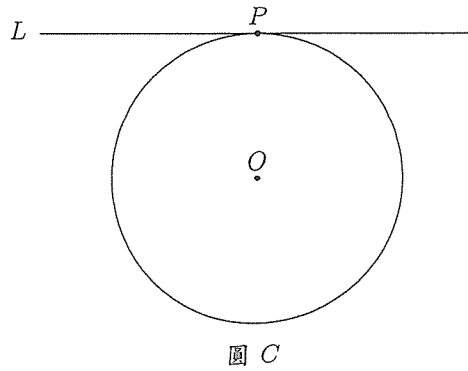


圖三

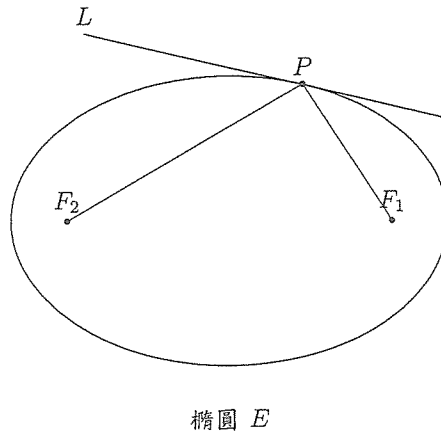
3. (8%) 延續上述手法，將 $t_n - t_{n+1}$ 解釋為某區塊的面積大小比較，說明為何 t_n 是遞減數列。

第四題 設 C 為以 O 圓心半徑 1 之單位圓， E 為以 F_1 與 F_2 為焦點之一橢圓。(如下圖所示)

1. (5%) 試證: 過圓 C 上之任意點 P , 存在唯一直線 L , 使得直線 L 與圓 C 恰相交於 P 點。



2. (5%) 試證: 過橢圓 E 上之任意點 P , 存在唯一直線 L , 使得直線 L 與橢圓 E 恰相交於 P 點。



3. (10%) (承上題 (2)) 試問: 焦點 F_1 與點 P 之連線與直線 L 之夾角與焦點 F_2 與點 P 之連線與直線 L 之夾角有何關係? 即 $\angle(F_1P, L)$ 與 $\angle(F_2P, L)$ 有何關係? 請詳細解釋你/妳的解答。

第五題

1. (5%) 以下哪些是一對一的函數 (多選)

- (a) $\sin x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (b) $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$
- (c) $\sec x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$
- (d) $\csc x : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

2. (5%) 以下哪些沒有反函數 (多選)

- (a) $\sin x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (b) $2^x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, \infty)$
- (c) $\log_{10} x : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
- (d) $4^{\tan x} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

3. (10%) 請寫出最大範圍的區間 $[a, b]$ 滿足 $[a, b] \subseteq [-2, 2]$ 並且

$$e^x \sin x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

為一對一的函數，同時找出區間 $[c, d]$ 使得

$$e^x \sin x : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

為一對一且映成。