數學傳播　卷期, pp.

從量綱看世界

林琦焜

1. 前言

『當對你討論之事物能加以測量並且能以數字表示時, 則你對它已有所了解, 但當你不能以數字表示時, 你的知識是含糊且不充分; 這或許是知識的開始, 但無論如何你的思想尚未進入科學的領域。』

— William Thomson (Lord Kelvin), 1824–1907 —

量綱 (因次) 分析 (dimensional analysis) 很難說從何時、何地、何人正式開始, 因此很難爲它立碑建傳, 基本上它是想推廣古希臘幾何中的相似與比例的觀念。所有的大師如牛頓、Maxwell、Boltzmann、Lord Kelvin、Planck、Einstein.... 等等, 他們在處理問題時內心深處其實是有量綱 (dimension) 的概念, 但基本上是 case by case! 法國數學家 J. Fourier (1768–1830) 的名著: 熱的解析理論 (Analytical Theory of Heat) 就出現量綱分析的論述, 20世紀初量綱分析才逐漸成形, 並且是物理學、數學中建立數學模型的重要方法之一。量綱分析是一門非常值得研究和學習的知識, 它是探討科學規律, 解決科學和工程問題的一個有效的工具。概念是這樣:

當一個理論被表述爲一組方程式時, 倘若理論與現實有所聯繫的話, 那麼抽象的符號必須與現實的物理特徵連結。

通過量綱分析可以檢查反映物理現象規律的方程在計量方面是否合理。它是在經驗和實驗的基礎上, 利用物理定律的量綱平衡 (齊次) 原則, 確定各物理量之間的關係。一個成熟的物理學家如果要探究某一個問題的時候, 往往是從定性或者半定量的角度入手分析, 他所使用的方法就是像數量級、量綱分析、對稱性分析等等。二次世界大戰期間英國流體力學大師 G. I. Taylor (3/7/1886-6/27/1975) 爲著研究原子彈爆炸, 從量綱分析的角度引進新的變數 (similar variables) 將 Euler 方程化爲常微分方程, 從而得出自相似解 (self-similar solution), 這結果甚至比美國國防部的機密資料還精確, 害得美國國防部官員要調查是否有洩密事件。

我個人於1988年至1992年在美國的 University of Arizona (Tucson, Arizona) 修讀博士學位, 該校以應用數學見長, 尤其是流體力學、孤立子 (Soliton) 理論還有動態系統 (Dynamical System) 等更是有特色, 因此有機會接觸這方面的大師級人物, 其中印像最深刻的是 V. Zakharov 的課 (Nonlinear Wave), 他是俄國人, 因此聽他的英文實在是萬分痛苦 (非常重的喉音), 聽起來像是北極熊, 但他確實是大人物, 只見黑板上任意的方程式這項比一比, 那項比一比, 解的形式就出來了, 似乎是在變魔術, 對我而言是極大的震撼, 但我確信這個方法絕對不難。還好 Zakharov 教授寫了非常簡潔的講義, 每天只好拿著這份講義 (至今我仍然保存著) 對著它發呆 (參禪), 一天、兩天, 一星期、兩星期, 一個月、兩個月, 就在某一天騎脚踏車回宿舍的路上, 突然之間頓悟了 (Eureka!)。回到宿舍之後也顧不得晚餐, 所謂打鐵趁熱或套句宗教術語不要消滅聖靈的感動 (學數學絕對不能讓心中那份感動消失!), 將以前學過的東西一一逐項檢驗是否合理, 一直到天亮, 從那時起我就成爲量綱分析的忠實信徒。在此也給讀者一個良心的建議: 多散步或騎脚踏車, 放慢人生的步伐才有可能成爲數學家 (哲學家)。

2. 量綱之概念

『我們有可能在不依賴於任何特殊個體或物質的條件下, 給出長度、質量、時間和溫度的單位, 並使其意義不隨時間而變, 不因文化而異; 即使外星文明和超人社會也是如此, 永遠如此。』

— Max Planck (1858–1947) —

2.1. 基本量 (單位)

一個完整的單位至少需要三個基本單位 (unit)。回顧中學學過的物理課, 一般的物理有 cgs 制或 MKS 制, 以 cgs 制而言; c 是公分 (cm)、g 是公克 (g)、s 是秒 (second)。因此

$$\text{長度}(L), \qquad \text{質量}(M), \qquad \text{時間}(T)$$

就是一個物理系統的基本單位, 基本單位不能以其它的物理量定義之, 其它的物理量都可以化爲這三個量之冪次方的乘積稱之爲導出量 (induced unit)。我們也可以改爲長度、速度、質量, 但一般而言是取長度、質量、時間爲基本單位。藉由量綱分析處理問題時這三個量會不斷出現, 也請讀者記得它們代表基本單位。

2.2. 導出量

由基本量做排列組合就是導出量。按牛頓的思想:

『數字不單純是一個數字, 而是具有物理本質的量。』

要了解一個物理量, 最好的方式就是明白其量綱 (dimension), 量綱本質上就是單位 (unit), 例如速度 (velocity)、加速度 (acceleration)

$$\begin{aligned} v = \frac{dx}{dt} \quad &\Longrightarrow \quad [v] = \left[\frac{dx}{dt}\right] = \frac{L}{T} \\ a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad &\Longrightarrow \quad [a] = \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = \frac{L}{T^2} \end{aligned}$$

這裡我們沿用大物理學家 J. C. Maxwell (1831–1879) 所建議, 以中括號 $[\cdot]$ 代表一個物理量的量綱 (dimension)。這裡要提醒的是

$$\frac{L}{T^2} = \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] \neq \left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = \frac{L^2}{T^2}$$

同理高階微分 $\frac{d^kx}{dt^k}$ 之量綱為

$$\left[\frac{d^kx}{dt^k}\right] = \frac{L}{T^k}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

其他的導出量例如, ρ (密度)、F (力)、P (壓力) 也可以化為這三個基本量的乘積。按定義, 密度是單位體積之質量 $\rho = \frac{m}{V}$, 所以 ρ 之量綱為

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{M}{L^3}$$

由牛頓第二運動定律 $F = ma$, 所以 F 之量綱為

$$[F] = [m][a] = MLT^{-2}$$

牛頓著名的萬有引力定律

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad [F] = MLT^{-2} = [G]\frac{M^2}{L^2}$$

所以萬有引力常數 G 之量綱為 $[G] = \frac{L^3}{MT^2}$, 它的值大約

$$G \approx 6.6726 \times 10^{-11}\text{米}^3/\text{千克} \cdot \text{秒}^2$$

由此也可推測 Kepler 行星第三定律: 行星距太陽的平均距離的立方與行星繞太陽週期的平方成正比, $T^2 \propto L^3$ 。

另外壓力是單位面積所受的力 $P = \frac{F}{A}$, 因此

$$[P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

順便一提, 假設壓力 P 是密度 ρ 的函數、$P=P(\rho)$, 則

$$\left[\frac{dP}{d\rho}\right]=\frac{[P]}{[\rho]}=\frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}}=\left(\frac{L}{T}\right)^2$$

右式等於速度的平方!在氣體動力學這項正是音速的平方

$$\frac{dP}{d\rho}=P'(\rho)=c^2,\qquad c:\text{(音速)}$$

2.3. 無量綱 (dimensionless)

無量綱 (dimensionless) 的觀念在量綱分析是非常重要的。

2.3.1: 角度不具有量綱

按角度的定義 (由圓弧來看) $\theta=\frac{s}{r}$, s 是弧長、r 是半徑, 這兩者都是長度單位 $[s]=[r]=L$, 因此角度 θ 是不帶有量綱的 (Angle is dimensionless.)

$$\theta=\frac{s}{r}\quad\Longrightarrow\quad[\theta]=\frac{[s]}{[r]}=\frac{L}{L}=1$$

相同的概念也可推論圓周率 π 是不具有量綱、$[\pi]=[s]/[2r]=1$ 。

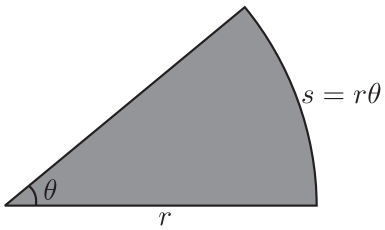

圖1. $[\theta]=[s]/[r]=1$

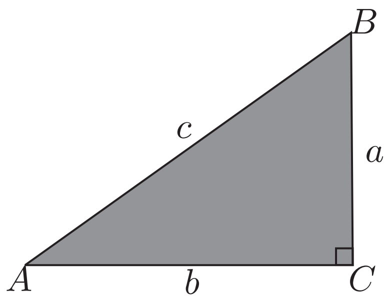

圖2. $[\sin A]=[a]/[c]=1.$

2.3.2: 三角函數不具有量綱

由三角函數之定義, 所有三角函數都是三角形邊長之比例, 所以三角函數不具有量綱, 例如

$$\sin A=\frac{a}{c}\quad\Longrightarrow\quad[\sin A]=\frac{[a]}{[c]}=\frac{L}{L}=1$$

2.3.3: 超越函數不具有量綱

超越函數 (trancendental function) 例如 e^x 、$\sinh x$ 此時 $[x]=1$ 而且 $[e^x]=[\sinh x]=1$, 這個觀念對於處理 Fourier 變換與 Laplace 變換是非常重要的。

3. 量綱平衡

量綱平衡 (dimensional balance) 這是量綱分析最重要的原則, 一個具有物理意義的方程式, 其等式兩端每一項的量綱必須一致, 凡是正確反映客觀規律的物理方程式, 其各項的量綱 (dimension) 都必須是一致, 只有方程式兩邊每一項的量綱都相同, 方程式才可能成立。量綱平衡背後的思想基本上是無量綱, 也是所謂無量綱化 (nondimensionalization) 之根據。

3.1. 牛頓力學公式

$$
\begin{aligned}
s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad &\Longrightarrow \quad L = \frac{L}{T} T = \frac{L}{T^2} T^2 \\
v = v_0 + at \quad &\Longrightarrow \quad \frac{L}{T} = \frac{L}{T} = \frac{L}{T^2} T
\end{aligned}
$$

讀者可以輕易的檢驗每一項都有相同的量綱。另外我們熟知的動能 E 與 (重力) 位能 U 分別是

$$
E = \frac{1}{2} m v^2, \quad U = mgh \quad \Longrightarrow \quad [E] = M \frac{L^2}{T^2} = M \frac{L}{T^2} L = [U]
$$

因爲動能與位能有相同的量綱, 因此可以相加減。

3.2. 單擺運動

學數學心裡一定要有例子 (examples), 而不是定義、定理與證明。單擺運動是我個人最熟悉的例子, 從方程的推導與各種解法甚至推廣至 Hamiltonian系統, 我都是藉由單擺運動來想像。單擺運動之周期公式; $\Theta = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, 可以藉由量綱分析兩邊比較單位

$$
T = [\Theta] = \left[2\pi \sqrt{l/g} \right] = \left(\frac{[l]}{[g]} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{L}{L/T^2} \right)^{\frac{1}{2}} = T
$$

如此就不會將 $\frac{l}{g}$ 或 $\frac{g}{l}$ 混亂。我們藉單擺運動解釋量綱分析的使用方法, 已知的量及其量綱如下:

單擺週期	Θ	$[\Theta] = T$
單擺長度	l	$[l] = L$
擺錘質量	m	$[m] = M$
重力加速度	g	$[g] = LT^{-2}$
單擺角度	θ	$[\theta] = 1$

這裡有5個物理量, 但基本量有3個, 因此我們期待有 $5-3=2$ 個無量綱的量, 因爲單擺角度 $\pi_1=\theta$ 不具有量綱, 我們還需要找到另一個無量綱的量, 透過左右配對量綱平衡的原則得

$$\pi_2=\frac{\Theta}{l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}}$$

π_1,π_2 這兩個無量綱的量可以有函數關係 (functional dependent)

$$\pi_2=p(\pi_1)\qquad\Longrightarrow\quad \Theta=p(\theta)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

實際上 $p(\theta)=2\pi$, 歷史上第一位計算出這個值的是 C. Huygens (1629-1695)。

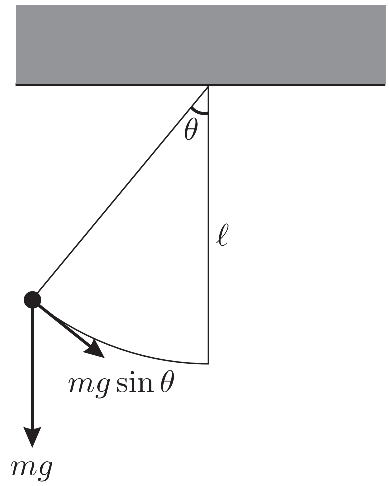

圖3. 單擺運動

另外則是從方程式出發

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0\qquad\text{or}\qquad\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0,\quad\theta\ll 1.$$

由量綱平衡的原則得

$$\frac{[\theta]}{T^2}=\frac{g}{l}[\sin\theta]=\frac{g}{l}[\theta]\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{T^2}=\frac{g}{l}\quad\Longrightarrow\quad\Theta\propto\sqrt{\frac{l}{g}}$$

透過量綱分析可以對物理推導過程進行檢驗, 它可以定性地表示出物理量與基本量之間的關係; 可以有效地應用它進行單位換算; 可以用它來檢查物理公式的正確性, 確認是否一致無誤, 甚至可以提供尋找物理現象某些規律的線索。學任何一門學問一定要有感覺, 因此我鼓勵讀

者對於所學過的所有等式與 (物理) 方程式都先利用量綱分析檢驗過, 並詢問各項所代表之物理意義, 久而久之必可培養對物理與數學的直觀。

4. 幾何上之應用

4.1. 畢氏定理

直角三角形 $\triangle ABC$ 之邊長 a 、b 、c 滿足關係式

$$a^2 + b^2 = c^2$$

可以藉由量綱分析來證明。決定直角三角形 $\triangle ABC$ 之面積 S_c 只需要斜邊與另一個銳角, 我們取斜邊 c 與其中一個銳角 ϕ 爲兩個參數

$$S_c = f(c, \phi)$$

已知角度 ϕ 是無量綱, 面積之量綱是長度的平方, 所以 S_c/c^2 是無量綱:

$$[S_c/c^2] = 1 \quad \Longrightarrow \quad S_c = c^2\Phi(\phi)$$

在歐氏空間 $\Phi(\phi) =$ 常數 。現在將 $\triangle ABC$ 分割成兩個以 a 、b 爲斜邊的直角三角形則 $S_a = a^2\Phi(\phi)$ 、$S_b = b^2\Phi(\phi)$

$$S_c = S_a + S_b \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$$

在非歐氏空間 $\Phi \neq$ 常數 , 畢氏定理當然不再是這個形式。

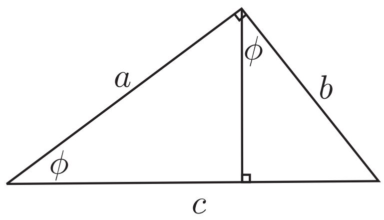

圖4. 畢氏定理 $a^2 + b^2 = c^2$

與畢氏定理直接關聯的是正弦定律與餘弦定律, 利用角度與三角函數是無量綱容易驗證這兩個等式是量綱平衡

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \qquad \left(\frac{L}{L^0} = \frac{L}{L^0} = \frac{L}{L^0}\right)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad \left(L^2 = L^2 = L^2 = LLL^0\right)$$

4.2. Hero(Heron) 公式

已知任意三角形 $\triangle ABC$ 三邊是 a 、b 、c , 令 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, 則

$$|\triangle ABC| = S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

由量綱 (因次) 分析的角度來看 Hero(Heron) 公式是非常有趣且直觀。底下是美國物理學家 Richard Feynman(1918年5月11日 $\sim$ 1988年2月15日) 在中學時的之想法。現在想像三角形 $\triangle ABC$, 其中 b 、c 兩邊漸漸往 a 邊壓, 當 $b+c > a$ 時會形成一個三角形, 因此面積 $S > 0$, 當 b 、c 壓到與 a 共線時, 即 $b+c = a$ 時, 面積 $S = 0$, 所以由因式定理推得 $b+c-a$ 會整除 S , 三角形三邊可以輪換, 因此 $c+a-b$ 、$a+c-b$ 也都會整除 S 。三角形的面積 S 並不隨 a 、b 、c 之位置而改變, 所以任意置換 (permutation) a 、b 、c 所得的面積始終是不變的。因此由不變量理論, S 必有 $(a+b+c)$ 這個因式, 綜合以上分析與因式定理, 可以猜測

$$S = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

但這是錯誤的!爲什麼? 假設 L 是長度的單位。令 $[f]$ 表示 f 之量綱 (dimension) 或單位, S 是面積, 所以 $[S] = L^2$, 而其它量都是長度

$$[a+b+c] = [a+b-c] = [b+c-a] = [c+a-b] = L$$

顯然 $L^2 \neq L \cdot L \cdot L \cdot L$, 但是 S 確實有這四個因式, 因此合理的猜想是右式要開根號, 所以可以猜

$$S = k\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

k 是一個待求之常數, 因此再以最熟悉的直角三角形三邊3、4、5帶入上式得 $6 = k\sqrt{12\cdot 2\cdot 6\cdot 4}$, 所以 $k = \frac{1}{4}$ 整理得 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 。

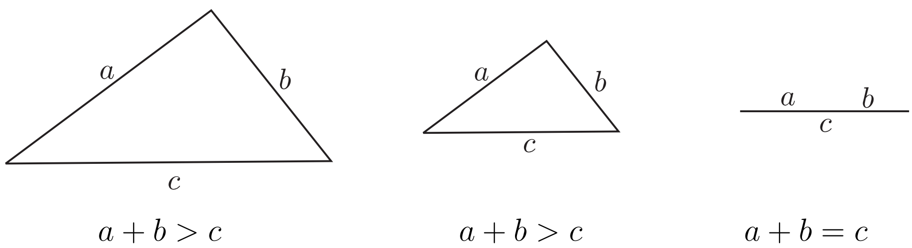

圖5. Hero(Heron) 公式

4.3. Frenet-Serret 公式

令 $\mathbf{t}$ 、$\mathbf{n}$ 、$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$ 是空間上曲線之 (單位) 切向量、(單位) 主法向量與 (單位) 次法向量 (binormal), 顯然 $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$ 形成一右手法則系統並且滿足一階微分方程:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\kappa\mathbf{n},\qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b},\qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds}=-\tau\mathbf{n},$$

其中 s 是弧長 (arc-length) 參數、κ 是曲率 (curvature)、τ 是扭率 (torsion)。曲率是切向量對弧長的變化率 $\kappa=\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|$ 、扭率則是次法向量對弧長的變化率 $\tau=\left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right|$ 。因爲 $[s]=L$ 、$[\mathbf{t}]=[\mathbf{n}]=[\mathbf{b}]=1$, 所以 Frenet-Serret 公式告訴我們曲率與扭率之量綱正是長度之倒數

$$[\kappa]=[\tau]=L^{-1}$$

從量綱的角度這也給了我們合理的解釋爲何稱曲率(扭率) 之倒數爲曲率半徑(扭率半徑)。

5. 量子力學

十九世紀, 科學家們普遍認爲古典力學的理論已趨於完備, 然而對於黑體輻射 (black body radiation) 存在現象, 卻無法用古典理論來解釋, 對於黑體輻射所衍生的問題, 在科學家的努力下漸漸揭開其神秘面紗, 在揭開其神秘面紗的同時也引領我們進入另一全新的領域 — 量子力學。1895-1900年間普朗克 (Max Planck) 爲著解決黑體輻射問題, 從理論猜測得出一黑體輻射公式, 普朗克的新公式中就含有一個新的 自然常量。他給這個常量取名爲 作用量單位, 並以 $\hbar$ 表示, 後來這個自然常量更名爲普朗克常數, 並一直延用至今。普朗克常數取值爲

$$\hbar\approx 6.626\times 10^{-34}\text{焦耳}\cdot\text{秒},\qquad \text{焦耳}=\text{千克}\cdot\text{米}^2/\text{秒}^2$$

5.1. Schrödinger 方程

量子力學之代表是 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi,\qquad H=H^*(\text{Hamiltonian})$$

左右兩邊比較量綱得普朗克常數 $\hbar$ 之量綱

$$[\hbar]=[H][t]=M\frac{L^2}{T^2}T=ML^2T^{-1}$$

所以 $\hbar$ 的量綱是 [能量] $\times$ [時間] , 這個量與古典力學的作用量 S 的量綱相同,

$$[\hbar]=[S]=[\text{作用量}]$$

這是了解量子力學最重要的一步。其次, 由de Broglie 物質波之假設

$$\lambda = \frac{\hbar}{p}(\text{波長}), \qquad \nu = \frac{E}{\hbar}(\text{頻率})$$

其中 p 是動量, E 是能量; 爲何 λ 是波長、ν 是頻率呢? 由量綱分析得

$$[\lambda] = \frac{[\hbar]}{[p]} = \frac{ML^2T^{-1}}{MLT^{-1}} = L$$
$$[\nu] = \frac{[E]}{[\hbar]} = \frac{[E]}{[E]T} = \frac{1}{T}$$

正好與波長、頻率有相同之量綱, 但是更有趣的是 λ 、ν 是波的特性, 而動量 p 與能量 E 則是粒子行爲, 兩者是透過普朗克常數 $\hbar$ 聯繫起來, 也就是說普朗克常數 $\hbar$ 是波 — 粒二象性的橋樑 (當尺度很小的時候)。

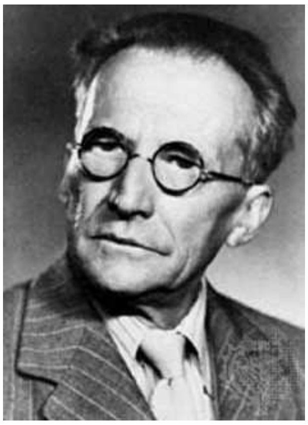

圖6. E. Schrödinger 1887-1961

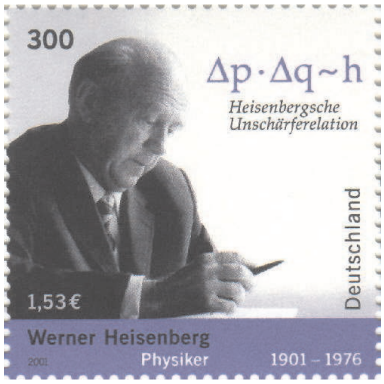

圖7. W. Heisenberg 1901-1976

5.2. Heisenberg 測不準原理

海森堡測不準原理或不確定性是說: 在一個量子力學系統中, 一個粒子的位置和它的動量不可被同時確定。位置的不確定性 $\triangle x$ 和動量的不確定性 $\triangle p$ 是不可避免的;

$$\triangle x \triangle p \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \triangle E \triangle t \geq \frac{\hbar}{2}$$

位置 x 與動量 p 之乘積還有能量 E 與時間 t 之乘積都與普朗克常數 $\hbar$ 有相同之量綱

$$[\triangle x][\triangle p] = L(MLT^{-1}) = ML^2T^{-1} = [\hbar]$$
$$[\triangle E][\triangle t] = (ML^2T^{-2})T = ML^2T^{-1} = [\hbar]$$

量子理論的不確定原理使得位置與動量或能量與時間同時量得之精確度有一個明確的限制。因爲無窮大尖銳的區域表示在空間和時間上有一個對位置或時間無限精確的測量, 因而動量或能量必須完全的不確定。一個不清楚普朗克常數 $\hbar$ 意義的人絕對不瞭解量子力學。

5.3. 普朗克長度、質量、時間

廣義相對論有兩個自然常數: 光速 c 與牛頓的萬有引力常數 G , 量子力學則只有一個自然常數: 普朗克常數 $\hbar$ 。有時物理學家喜歡以 $\{G, c, \hbar\}$ 取代 長度、質量、時間做爲基本單位。例如透過量綱分析容易驗證 $\sqrt{\hbar G/c^3}$ 具有長度單位

$$\left[\sqrt{\hbar G/c^3}\right] = \left(\frac{ML^2T^{-1}\frac{L^3}{MT^2}}{(L/T)^3}\right)^{\frac{1}{2}} = L$$

$\sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.62 \times 10^{-35} m$ 就是普朗克長度, 它包含有重力 G 與時空 c 的資料, 也包含了量子之訊息 $\hbar$, 任何嘗試調和這兩個理論的測量長度單位必然是普朗克長度。另外 $\sqrt{\hbar c/G} \approx 2.18 \times 10^{-8} kg$ 是普朗克質量

$$\left[\sqrt{\hbar c/G}\right] = \left(\frac{ML^2T^{-1}LT^{-1}}{L^3M^{-1}T^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = M$$

而 $\sqrt{\hbar G/c^5} \approx 5.38 \times 10^{-44} sec$ 則是普朗克時間 (就是光走過普朗克長度所需的時間!)

$$\left[\sqrt{\hbar G/c^5}\right] = T$$

由上述三個自然單位組成的單位制, 人們稱爲普朗克單位制 (或自然單位制), 這是普朗克於19世紀末 (1899年) 領悟出來的。

圖8. Max Planck 1858-1947.

6. 分析與不等式

我們可以將量綱平衡之原則應用到不等式:

『任何兩個量必須具有相同的量綱才能比較大小。』

一個函數的微分、積分也是具有量綱

$$
\begin{aligned}
\nabla^k f \quad &\Longrightarrow \quad [\nabla^k f] = \frac{[f]}{L^k} = \frac{F}{L^k} \\
\int f dx \quad &\Longrightarrow \quad \left[\int f dx\right] = [f][dx] = FL^n
\end{aligned}
$$

我們以大寫 F 代表函數 f 之量綱, dx 是 n 維測度代表體積, 所以 $[dx] = L^n$, 積分符號 $\int$ 是 $\sum$ 之變形不具有量綱 (面積加面積還是面積 $1+1=1$!)。微分、積分之量綱有本質上的差異:

『積分—量綱增加、微分—量綱減少。』

藉由量綱分析可以容易判斷瑕積分之範圍

$$
\begin{aligned}
\int_{|\mathbf{x}|>1} |\mathbf{x}|^{-\alpha} d\mathbf{x} \approx L^{n-\alpha} \quad (L \to \infty) \quad &\Longrightarrow \quad n-\alpha < 0 \\
\int_{|\mathbf{x}|\le 1} |\mathbf{x}|^{-\alpha} d\mathbf{x} \approx L^{n-\alpha} \quad (L \to 0) \quad &\Longrightarrow \quad n-\alpha > 0
\end{aligned}
$$

長度單位 L 可大可小, 對有界區域需考慮 $L \to 0$, 因爲我們不希望有擁擠或集聚 (concentration) 的現象也就是 δ -函數產生, 因此要求指數爲正、$n-\alpha>0$ 。對無窮區域此時相當於 $L \to \infty$, 因爲我們不希望無窮大產生, 因此指數必須爲負、$n-\alpha<0$ 。如果 $n-\alpha=0$, 則積分不具有量綱 (dimensionless)

$$
\left[\int_{|\mathbf{x}|>1} |\mathbf{x}|^{-\alpha} d\mathbf{x}\right] = L^0 = 1 \qquad (\alpha = n)
$$

所以這個積分會以對數函數的形式出現。

6.1. Gamma-Beta 函數

Gamma函數 $\Gamma(x)$ 與 Beta 函數 $B(x,y)$ 定義爲

$$
\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \qquad x > 0
$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad x>0, \quad y>0$$

藉由量綱分析可以簡單地猜測爲何 Gamma 函數- $\Gamma(x)$ 必須要求 $x>0$ 而 Beta函數- $B(x,y)$ 必須要求 x 、$y>0$ 。首先 $\Gamma(x)$ 之積分函數中有 e^{-t} , 所以無窮遠點 ∞ 沒有問題, 我們只需要考慮有界區域

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \approx [t]^{x-1}[t]=[t]^x \quad ([t]\to 0) \quad \Longrightarrow \quad x>0$$

對 $B(x,y)$ 函數而言只需要考慮有界區域其中有問題的地方是 $t=0$ 、1

$$B(x,y)\approx [t]^{x-1}[t]=[t]^x \quad ([t]\to 0) \quad \Longrightarrow \quad x>0$$

$$B(x,y)\approx [t]^{y-1}[t]=[t]^y \quad ([t]\to 0) \quad \Longrightarrow \quad y>0$$

藉由量綱分析也可以簡單判斷高斯積分 (Gauss integral)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad a>0$$

必然有 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 這個量:

$$\left[\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}dx\right]=[x]=\frac{1}{[a]^{1/2}}\,, \qquad [ax^2]=1$$

6.2. Laplace 與 Fourier 變換

(1) 已知 $\alpha>0$ 則

$$\mathcal{L}(t^{\alpha-1})=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-st}dt=\Gamma(\alpha)s^{-\alpha}$$
$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}t^{\alpha-1})=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{\lambda t}e^{-st}dt=\Gamma(\alpha)(s-\lambda)^{-\alpha}$$

因爲 e^{-st} 是超越函數, st 必定是無量綱 $[st]=[s][t]=1$

$$\left[\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-st}dt\right]=[t]^{\alpha-1}[t]=[t]^\alpha=[s]^{-\alpha}$$

除了常數 (無量綱) 之外, 冪函數 $t^{\alpha-1}$ 之 Laplace 變換必定是冪函數 $s^{-\alpha}$ 。同理第二個 Laplace 變換我們只需將 $[st]=1$ 換爲 $[(s-\lambda)t]=1$, 函數乘 $e^{\lambda t}$ 相當於其 Laplace 變換做了平移變換 $s\mapsto s-\lambda$ 。

(2) 已知 $0 < \alpha < n$ 則

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha-n} e^{-ix\cdot\xi} dx = \frac{2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})} |\xi|^{-\alpha}$$

由量綱分析可以確信 $|x|^{\alpha-n}$ 之 Fourier 變換必定是冪函數 $|\xi|^{-\alpha}$;

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n+\alpha} e^{-ix\cdot\xi} dx\right] = L^{-n+\alpha} L^n = L^\alpha = \widehat{L}^{-\alpha} = [\xi]^{-\alpha}$$

$$[x\xi] = [x][\xi] = L\hat{L} = 1$$

6.3. Hölder 不等式

已知 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 、$1 \leq p$ 、$q \leq \infty$ 、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 且 $f \in L^p(\Omega)$ 、$g \in L^q(\Omega)$ 則

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

量綱分析可以簡單判斷爲何需要 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\int_\Omega |fg| dx \approx [f][g]L^n, \quad \|f\|_p \|g\|_q \approx [f]L^{\frac{n}{p}}[g]L^{\frac{n}{q}} \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{n}{p} + \frac{n}{q}$$

所以 $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 告訴我們的正是量綱平衡, 詳細的細節可參考數學傳播或相關的文章。幾乎所有數學分析的不等式都是由 Hölder 不等式或 Cauchy-Schwarz 不等式再加上微積分基本定理所組成, 在此鼓勵讀者對這些不等式花點硬功夫, 它 (她) 給你的回報是難以想像的。

量綱分析是認識並研究複雜現象以及解決工程問題的重要工具, 她可以讓你有基本的世界觀, 而這個世界觀提供了一個有意義的基礎以解釋你的感覺或其它的測量所得的資訊, 她提供了最接近大自然的近似結果: 當我們在描述事物時, 實際上是在描述它們的量綱。筆者由這門學問受益良多, 希望藉由這篇文章與讀者分享這份喜悅, 並期盼讀者進而對於方程式、不等式與數學有更直觀的認識。

『我們可以說大門已經第一次對一種新方法而開, 這種新方法充滿了多種奇妙的結果,
將來會引起其他人的關注。』

— 伽利略 (1564 – 1642) —

圖9. Galileo Galilei 1564-1642

交大應數研究所博士班吳恭儉與李信儀幫忙校稿並給了一些寶貴意見, 在此特別謝謝他們。

參考資料

1. G. I. Barenblatt; *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (1996).
2. G. I. Barenblatt; *Scaling*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2003).
3. B. J. Cantwell; *Introduction to Symmetry Analysis*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2002).
4. 林琦焜: *Cauchy-Schwarz* 不等式之本質與意義, 數學傳播 (中央研究院數學所), Vol. 93, 26-42 (2000)。
5. 林琦焜: 單擺運動, 數學傳播 (中央研究院數學所), Vol. 106, 36–43, (2003)。
6. 林琦焜: 向量分析, 滄海書局, 2007。
7. 林琦焜: *Riesz* 位勢與 *Sobolev* 不等式, 交通大學出版社, 2008。

—本文作者任教國立交通大學應用數學系—