數學傳播　卷期, pp.

實數系的建構

林琦焜

— 導數眞正是甚麼? — 答: 極限

— 積分眞正是甚麼? — 答: 極限

— 無窮級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 眞正是甚麼? — 答: 極限

這就導致了底下的問題

— 極限是甚麼? — 答: 數

所以最終的問題是:

— 數是甚麼?

— Augustin Cauchy (1789−1846) —

§1. 前言

西元1872年是不平凡的一年, 這一年, 有好幾位 (五位! Weierstrass, Dedekind, Méray, Heine, Cantor) 數學家同時提出了實數系統建構的理論。他們不約而同地出版他們的著作討論困惑人們2500年之久的無理數問題, 他們出發點不同, 方法也各異, 但他們都把有理數當做已知的東西, 從而描述實數系統。他們描述的方法雖異, 但從數學的結構觀點來看, 所描述的卻是同樣的東西。他們的目標是: 在不預先假設無理數存在的條件下, 建立一個令人滿意的無理數理論。然後把無理數和有理數合在一起構成實數, 之後為實數建立一個可靠的連續性理論。如此數學分析 (主要研究實變量的實函數), 才能有一個牢靠的基礎。

圖 1. Weierstrass

圖 2. Heine

Georg Cantor (1845−1918) 的父母都是猶太裔, 他的父親生於丹麥的哥本哈根, 年輕時移居俄國聖彼得堡, 1845年3月3日數學家 Georg Cantor 誕生於此。1956年舉家遷往德國的法蘭克福, 之後 Cantor 就一直在德國接受教育, 後來進入柏林大學。他的博士論文是從鑽研高斯的 "Disquisitiones Arithmeticae" 得到啓發而研究不定方程。後來在大數學家 Weierstrass 學派的影響下研究 Fourier 級數, 從而創造著名的無限數學 — "集合論"。

Charles Méray (1835−1911) 是法國數學家, 他主要是研究 Lagrange 早年的工作, 針對 Lagrange 只作出猜測的工作, 加以嚴格的數學證明。他發表關於無理數的算術理論是等價於 Cantor 的理論, 但顯然他的工作並沒有受到 Weierstrass 與 Dedekind 的影響。

Richard Dedekind (1831−1916) 是德國數學家, 他是高斯的閉門弟子 (那時高斯已75歲高齡), Dedekind 主要是研究 Euler 積分, 但使他名垂千古的是與 Cantor 共同創造集合論與實數理論的 Dedekind 斷口 (Dedekind cut), 另外根據整數論的研究, 他創造了代數學的重要概念 — 理想 (ideals), 他取這個名稱主要是爲了紀念德國數學家 Ernst Kummer (1810−1893)。Dedekind 思想開放, 治學嚴謹, 是1880年代勇於探討無限 (infinite) 的少數數學家。他是 Cantor 號召的數學同好, 他們從1872年到1899年書信往返達27年, 在彼此旗鼓相當的對話中, 可以看見兩位智者彼此切磋琢磨互相砥礪, 在嚴厲的評論中逼對方給出最好的數學成果。這些書信是數學文學中最美的作品。

從技術層面而言 Dedekind 斷口與 Cantor 的基本序列解決了實數的理論, 它們反映了兩個互相等價的事實: 最小上界原理, Cauchy 的收斂性原理。數學分析的基礎: 極限, 連續性原理就是奠基於這些原理與長度和距離等幾何概念之上。Dedekind 或 Cantor-Méray 的實數建構看來很抽象, 但它們卻可經由已知的有理數來定義的清清楚楚。它們更可用來澄清連續與極限的觀念, 使微積分立於堅固的邏輯基礎上, 使分析學的嚴謹化達成目的。

§2. Cantor-Méray 的實數理論

『數學在其發展中是完全自由的, 它只受下述自明的關注所制約, 即它的概念既要內在地不存在矛盾, 還要參予確定與此前形成的, 已經存在著的和已被證明的概念之關係 (藉助定義貫串起來)。特別地, 在引入新數時, 數學只遵循: 在給出它們的定義時使之具有某種確定性, 並且在某些情況下, 使之與舊數有某種關係, 在特定的場合中這種關係一定會使它們 (新數跟舊數) 互相區別開來。只要一個數滿足這些條件, 數學只能而且必須把它看作是存在且實在的東西。這正是我在第四段中關於爲什麼必須把有理數 、無理數和複數看作與有限正整數一樣是實存的所建議的理由。』

— G. Cantor (1845−1918) —

圖3. Cantor

第一個實數系統建構的理論是 G. Cantor 和 C. Méray (1835−1911) 於1872年提出的。當我們問一有理數列

$$a_n = 2 \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdots \frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)} \tag{2.1}$$

的極限爲什麼? 在有理數系中我們實在無法說 a_n 的極限是甚麼, 也就是說有理數系不完備, 我們就把它擴大, 使其有極限, 一個有理數列 $\{x_n\}_n$, 如果當 m, n 夠大時, $|x_n - x_m|$ 就會小到任何預定範圍內, 則稱 $\{x_n\}_n$ 爲一 Cauchy 數列。

定義 2.1 (**有理** Cauchy **數列**). $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ 是一個有理 Cauchy 數列, 意思是對於每個 $\epsilon > 0$, 都存在$\omega \in \mathbb{N}$, 使得

$$\forall m, n \geq \omega \quad \Longrightarrow \quad |x_n - x_m| < \epsilon \tag{2.2}$$

如果把一 Cauchy 數列相應的點標在直線上, 則這些點終究會擠在一起。Cantor-Méray 希望他們的實數系會使 x_n 趨近於一實數, 所以乾脆就讓 $\{x_n\}_n$ 代表一實數, 也就是實數等於

所有的有理數 Cauchy 數列, 但是另一有理數 Cauchy 數列 $\{y_n\}$ 亦可能與 $\{x_n\}$ 趨近於同一實數, 所以如果 $x_n - y_n \to 0$ 則 在 Cantor-Méray 系統中, 我們就認定 $\{x_n\}$和 $\{y_n\}$ 代表同一實數。Cantor-Méray 的思維方式是: 藉由 Cauchy 數列, 來定義全等關係 (equivalent relation), 再由全等關係得出全等類 (equivalent class), 而全等類就代表實數;

$$\text{Cauchy數列} \iff \text{全等關係} \iff \text{全等類}$$

整個架構是從 Cauchy 數列開始, 因此需要距離 (metric) 的概念, 事實上 Cantor 的方法可以推廣至距離空間 (metric space)。

全等關係, 全等類

我們分別用有理數列與 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 對應

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\quad\leftrightarrow\quad \{1.4;\quad 1.41;\quad 1.414;\quad \cdots\} \\ \sqrt{3} &\quad\leftrightarrow\quad \{1.7;\quad 1.73;\quad 1.732;\quad \cdots\} \end{aligned}$$

則 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ 與底下有理數列對應

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \quad\leftrightarrow\quad \{2.38;\quad 2.4393;\quad 2.449048;\quad \cdots\}$$

但另一方面

$$\sqrt{6} \quad\leftrightarrow\quad \{2.4;\quad 2.44;\quad 2.449;\quad \cdots\}$$

依據我們對 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{6}$ 的認識, 這兩個 “數” 是一樣的, 因此有必要鑑定這兩個有理數列。爲此我們引進全等關係 (equivalent relation), 全等類 (equivalent class) 的概念。

定義 2.2 (**全等關係**). 兩個有理 Cauchy 數列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 對任意正有理數 ϵ 若滿足

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0, \quad \text{存在正整數 } N \geq 1, \quad \forall n \geq N \quad\iff\quad |x_n - y_n| < \epsilon \tag{2.3}$$

則稱數列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 爲全等或等價 (equivalent), 記爲 $\{x_n\} \sim \{y_n\}$。

由這個定義不難證明全等關係滿足:

(1) 反身性 (reflexive): $\{x_n\} \sim \{x_n\}$

(2) 對稱性 (symmetric): $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Longrightarrow \{y_n\} \sim \{x_n\}$

(3) 遞移性 (transitive): $\{x_n\} \sim \{y_n\}, \{y_n\} \sim \{z_n\} \Longrightarrow \{x_n\} \sim \{z_n\}$

有了全等關係就可以造全等類,

$$\overline{\{x_n\}} = \{\{y_n\} \mid \{y_n\}\text{是有理數列且 } \{y_n\} \sim \{x_n\}\}$$

定義 2.3 (Cantor-Méray). 實數 ($\mathbb{R}$) 是所有有理 Cauchy 數列之全等類的集合:

$$\mathbb{R} = \{\overline{\{x_n\}} \mid \{x_n\} \text{ 是 Cauchy 有理數列}\} \tag{2.4}$$

在 Cantor-Méray 的思想體系中, 有理 Cauchy 數列 $\{x_n\}_n$ 就代表一實數, 兩個有理數 Cauchy 數列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$如果滿足 $|x_n - y_n| \to 0$, $n \to \infty$ 則在 Cantor-Méray 系統中就認定 $\{x_n\}$和 $\{y_n\}$代表同一實數。

此系統最具體的表示就是無窮小數, 任意無窮小數

$$x = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{10^m}, \qquad a_m \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad a_0\text{爲整數}, \tag{2.5}$$

都可看成 Cauchy 數列 $\{x_n\}$,

$$x_n = a_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{a_m}{10^m}$$

至於原來的有理數 $x \in \mathbb{Q}$, 也可相應到一 Cauchy 數列 $\{x_n\}$ 其中任一 x_n 都和 x 相等 (常數數列):

$$x \quad \leftrightarrow \quad \overline{\{x, x, x, \cdots\}} \tag{2.6}$$

因此 x 是一個實數, 有理數是實數的子集合, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$。在 Cantor-Méray 的實數系, 任何一個實數, 例如 π, e, $\sqrt{2}$, $0.\dot{6}$, $\cdots$ 代表一大群的數, 而且這些數 (有理數) 彼此都非常接近。

『這樣 $\sqrt{3}$ 只是一個待求數的符號, 但卻不是它的定義, 而是按我的方法 $\sqrt{3} \approx (1.7, 1.73, 1.732, \cdots)$。』

— G. Cantor (1845–1918) —

四則運算

有理數有四則運算 (加, 減, 乘, 除), 那麼在 Cantor-Méray 系 統中如何定義兩個有理 Cauchy 數列的四則運算與大小關係呢? 令 $x = \overline{\{x_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}}$ 代表兩個實數我們定義加法, 乘法如下:

$$x + y := \overline{\{x_n + y_n\}}, \qquad x \cdot y := \overline{\{x_n \cdot y_n\}} \tag{2.7}$$

這個定義不會有問題發生。因爲 $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$ 是有理 Cauchy 數列:

$$|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)|\le |x_n-x_m|+|y_n-y_m|\to 0,\qquad n,m\to\infty$$

$$\begin{aligned}|x_n\cdot y_n-x_m\cdot y_m|&=|x_n\cdot y_n-x_m\cdot y_n+x_m\cdot y_n-x_m\cdot y_m|\\&\le |y_n||x_n-x_m|+|x_m||y_n-y_m|\to 0,\qquad n,m\to\infty\end{aligned}$$

其次必須保證這個定義是 well-defined, 若 $\{x'_n\}$ 與 $\{x_n\}$ 表同一實數, $\{y'_n\}$ 與 $\{y_n\}$ 表同一實數, 則

$$(x_n+y_n)-(x'_n+y'_n)=(x_n-x'_n)+(y_n-y'_n)\to 0,\qquad n\to\infty$$

$$(x_n\cdot y_n)-(x'_n\cdot y'_n)=(x_n-x'_n)y_n+x'_n(y_n-y'_n)\to 0,\qquad n\to\infty$$

因此 $\overline{\{x_n+y_n\}}$, $\overline{\{x'_n+y'_n\}}$, 代表相同的實數, 同理 $\overline{\{x_n\cdot y_n\}}$, $\overline{\{x'_n\cdot y'_n\}}$, 也代表相同的實數。至於除法, 則必須先要求 $y_n\ne 0$, 如此則存在夠大的 n_0 使得當 $n\ge n_0$ 時 $|y_n|>r>0$, 此時定義除法爲

$$x\div y=\overline{\{x_n\}}\div\overline{\{y_n\}}=\overline{\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}}\tag{2.8}$$

按這樣的定義有理 Cauchy 數列 $\overline{\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}}$ 所代表的實數與前 n_0 項無關。另外 $x=\overline{\{x_n\}}$ 之加法反元素與乘法反元素定義爲

$$-x=\overline{\{-x_n\}},\qquad x^{-1}=\overline{\{x_n^{-1}\}}=\overline{\{1/x_n\}}\tag{2.9}$$

而加法, 乘法及加法與乘法間的運算關係也會滿足體 (field) 的要求。

定理 2.4 (**體**, field). $(\mathbb{R},+,\cdot)$ 是一個體 (field)。

(1) 交換律 (加法): $x+y=y+x$

(2) 結合律 (加法): $(x+y)+z=x+(y+z)$

(3) 加法單位元素 0: $0+x=x$

(4) 加法反元素 $-x$: $-x+x=0$

(5) 交換律 (乘法): $x\cdot y=y\cdot x$

(6) 結合律 (乘法): $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$

(7) 乘法單位元素 1: $1\cdot x=x$

(8) 乘法反元素 x^{-1}, $(x\ne 0)$: $x^{-1}\cdot x=1$

(9) 乘法對加法分配律: $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

大小關係

定義 2.5 (**大小關係**: order). 令 $x = \overline{\{x_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}}$ 代表任意兩個實數其大小關係 (order) 可如此定義:

$$
\begin{aligned}
x < y \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \epsilon' > 0, \quad \exists N \geq 1, \quad \forall n \geq N, \quad x_n < y_n - \epsilon' \\
x \leq y \quad &\Longleftrightarrow \quad x < y \quad \text{或} \quad x = y
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

特別要注意的是 ϵ' 的選取必須是有理數, 否則 Cantor-Méray 的理論無法適用。令 $x = \overline{\{x_n\}} = \overline{\{x'_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}} = \overline{\{y'_n\}}$, 滿足 $x'_n - x_n \leq \epsilon_1$, $y_n - y'_n \leq \epsilon_2$ 則

$$
x'_n - y'_n = (x'_n - x_n) + (y_n - y'_n) + (x_n - y_n) \leq \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon' = \epsilon''
$$

所以大小的定義與所選取的 Cauchy 有理數列無關。由這定義再加上 $\mathbb{R}$ 是一個體 (field), 可以證明實數 $\mathbb{R}$ 是一個有序體 (ordered field)。

定理 2.6 (**有序體**, ordered field). 已知 $x = \overline{\{x_n\}}$, $y = \overline{\{y_n\}}$, $z = \overline{\{z_n\}}$ 是任意三個實數, 則

(1) 反身性 (reflexive): $x \leq x$

(2) 反對稱性 (antisymmetric): $x \leq y, \quad y \leq x \quad \Longrightarrow \quad x = y$

(3) 遞移性 (transitive): $x \leq y, \quad y \leq z \quad \Longrightarrow \quad x \leq z$

(4) $x \leq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \leq y + z$

(5) $0 \leq x, \quad 0 \leq y \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq xy$

在代數中滿足上述不等式關係的體稱爲有序體 (ordered field), 有理數與實數都是有序體, 那此二種數系的差別在哪裡呢? 實數有一個特殊的性質 “實數中的 Cauchy 數列一定有極限値”, 也就是說實數是完備的 (complete), 這是實數與有理數最大的差異。實際上, 可以證明: 實數是唯一的完備有序體。

說到大小, 我們還需要絕對值, 爲此先引進 total 的概念:

引理 2.7 (total). x, y 是任意兩個相異實數, $x \neq y$, 則 $x < y$ 或 $y < x$。

在證明引理 2.7 之前, 我們首先釐清 $x \neq y$ 的意義, 在 Cantor-Méray 的系統下, 兩個實數相等是指它們是全等的有理 Cauchy 數列, 因此 $x = \overline{\{x_n\}} \neq y = \overline{\{y_n\}}$ 意思是

$$
\{x_n\} \not\sim \{y_n\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0 \quad \forall N \geq 1, \quad \exists n \geq N, \quad |x_n - y_n| \geq \epsilon
\tag{2.11}
$$

引理2.7之證明: 令$x=\overline{\{x_n\}}$, $y=\overline{\{y_n\}}$是兩相異實數, 即滿足 (2.11), 另外 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 是有理 Cauchy 數列, 存在$N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ 滿足

$$\begin{aligned}|x_n - x_{n+k}| &< \frac{\epsilon}{3}, \qquad n \geq N_1, \qquad k \geq 1\\ |y_n - y_{n+k}| &< \frac{\epsilon}{3}, \qquad n \geq N_2, \qquad k \geq 1\end{aligned}$$

選取$N=\max\{N_1, N_2\}$, 則由 (2.11) 知道有兩種可能性

$$x_n - y_n \geq \epsilon \qquad \text{或} \qquad y_n - x_n \geq \epsilon$$

顯然 $\forall k \geq 1$, x_{n+k}, y_{n+k} 總是落在半徑 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{3}$ 的圓盤內, 因此

$$\begin{aligned}&\exists \epsilon' = \frac{\epsilon}{3} > 0, \quad \exists N \geq 1, \quad \forall n \geq N, \quad x_n \leq y_n - \epsilon'\\ &\exists \epsilon' = \frac{\epsilon}{3} > 0, \quad \exists N \geq 1, \quad \forall n \geq N, \quad y_n \leq x_n - \epsilon'\end{aligned}$$

這相當於說 $x<y$ 或 $y<x$。

如果大小關係滿足引理 2.7, 我們特別稱爲 total, 因此就可以定義絕對值 (absolute value)。

定義 2.8 (total). $x=\overline{\{x_n\}}$ 是一實數則其絕對值爲 $|x| = \overline{\{|x_n|\}}$

由定義 2.8 容易證明三角不等式 $|x+y| \leq |x|+|y|$。藉由 Cantor-Méray 的思想體系, 可以把無理數 (irrational number) 建立在一個合理且嚴格的數學理論基礎上, 這個方法

$$\text{Cauchy數列} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{全等關係} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{全等類}$$

也實際提供我們如何將任意一個非完備距離空間完備化 (completion) 的方法。

§3. Dedekind 的實數理論

『上面把有理數比做直線, 結果使直線上充滿了間隙, 它是不完備的、不連續的, 而我們則把直線看成是沒有間隙的、完備的和連續的。直線的連續性是什麼意思? 這個問題的答案必須包含研究所有連續區域時所根據的科學基礎, 只是泛泛而談其最小子集的不間斷的連接性, 不會產生什麼結果, 我們必須要有連續性的一個精確定義, 使它可以成爲邏輯推理的基礎。長時期以來, 我對這些事情進行了深入思考, 但始終沒有取得成果, 一直到最近我才發現我所要尋求的答案。不同的人對於我的發現將會有不同的判斷, 但我相信大多數人都會覺得它平凡無奇。在上一段中我曾指出, 直線

上每一點 p 都將直線分成兩部分, 使得其中一部分的點都在另一部分的點的左方。我確信, 連續性的實質就在於它的反面, 也就是下面的原理, 如果直線上所有的點都屬於兩類, 使得第一類中每一點都在另一類中每一點的左方, 那麼就存在唯一的一個點, 它產生了把直線分成兩部分的分割。』

— R. Dedekind (1831–1916) —

圖4. Dedekind

在西元 1872 年左右除 Cantor 及 Méray 外, R. Dedekind 提出另一種描述實數的方法。對 Dedekind 而言, 他所選取的假設是

任何單調有界的實數序列都有極限存在。

他的想法如下: 在一直線 (實數線) 上, 我們先規定好原點 0 及 單位長 (規定爲 1), 則所有有理數都可以依據其大小 (與原點之距離) 及正負對應到此線上。如果我們在直線上砍一刀, 在斷口 (cut) 左邊的所有有理數集合稱爲 A_1, 其右邊的有理數集合稱爲A_2。若斷口正好是有理數, 則此有理數可以任意規定屬於 A_1 或 A_2。這個斷口就稱爲 Dedekind 斷口 (Dedekind cut) 以 (A_1, A_2) 表之。(A_1, A_2)這種集合有下列性質：

(a) A_1, A_2 都含有有理數, $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$

(b) A_1 及 A_2 的聯集爲有理數; $A_1 \bigcup A_2 = \mathbb{Q}$

(c) A_1 中的有理數必小於 A_2 中的有理數, $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2 \Longrightarrow a_1 < a_2$。

因爲 A_1, A_2 都是有理數, 所以這種集合從最大值, 最小值的觀點來分類有底下三種情形

(1) A_1 有最大, A_2 沒有最小有理數

(2) A_1 沒有最大, A_2 有最小有理數

(3) A_1 沒有最大, A_2 沒有最小有理數

我們藉幾何直觀而得 A_1, A_2這兩個集合, 反過來, 我們可以完全捨棄幾何, 而考慮滿足上述兩個性質的有理數子集合 A_1, A_2。這樣的 A_1, A_2 稱爲一個斷口 (cut), 以 (A_1, A_2) 表之。一個斷口 (A_1, A_2) 滿足 (1) 或 (2) 則 (A_1, A_2) 所代表的就是這個有理數, 如果滿足 (3) 則

(A_1, A_2) 代表的就是一個無理數。所以 Dedekind 斷言說 (A_1, A_2) 就代表一個實數, 而且實數的全體就是所有 Dedekind 斷口的集合。如果 A_1 (或A_2) 中有最大 (或小) 的有理數, 則 (A_1, A_2) 代表的就是這個有理數。因此可知有理數可用兩種斷口表示, 而且 Dedekind 的實數系確實是有理數系的擴張。

在 Dedekind 的系統中如何定義四則運算與大小關係呢? 若 α, β 爲任意兩個 Dedekind 斷口

$$\alpha = (A_1, A_2), \qquad \beta = (B_1, B_2)$$

令 $C_2 := \{a+b | a \in A_2, b \in B_2\}$, $C_1 = \mathbb{Q} - C_2$ 則新的斷口 (C_1, C_2) 代表一個實數, 記爲 $\gamma = (C_1, C_2)$ 所以加法就定義爲

$$\alpha + \beta = \gamma, \qquad (A_1, A_2) + (B_1, B_2) = (C_1, C_2)$$

由這個定義可以證明加法滿足交換律與結合律, 所以 $(\mathbb{R}, +)$ 形成一個 abelian 群 (abelian group), 而 0 是加法單位元素。

其次是乘法, 首先考慮兩個 Dedekind 斷口都位於原點右方; $\alpha, \beta \geq 0$, 令 $D_2 := \{a \cdot b | a \in A_2, b \in B_2\}$, $D_1 = \mathbb{Q} - D_2$, 則新的斷口 $\delta = (D_1, D_2)$ 是一個實數, 我們就定義

$$\alpha \cdot \beta = \delta, \qquad \alpha \geq 0, \qquad \beta \geq 0$$

其他情形則定義如下:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= -((-\alpha) \cdot \beta), \qquad &\alpha < 0, \qquad &\beta \geq 0 \\ \alpha \cdot \beta &= (-\alpha) \cdot (-\beta), \qquad &\alpha < 0, \qquad &\beta < 0 \\ \alpha \cdot \beta &= -(\alpha \cdot (-\beta)), \qquad &\alpha > 0, \qquad &\beta < 0 \end{aligned}$$

在這個定義下可以證明乘法滿足交換律, 結合律與分配律, 所以 $(\mathbb{R}, +, \cdot\,)$ 形成一個體 (field), 而 1 是乘法單位元素。

關於大小關係, 從幾何的角度來看是很直觀的

$$\alpha \leq \beta \quad \Longleftrightarrow \quad A_1 \subset B_1, \quad (A_2 \supset B_2)$$

可以證明

$$\begin{aligned} \alpha \geq \beta \quad &\Longrightarrow \quad \alpha + \gamma \geq \beta + \gamma \\ \alpha \geq \beta, \quad \gamma \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \cdot \gamma \geq \beta \cdot \gamma \end{aligned}$$

所以 Dedekind 的實數系是一個有序體 (order field)。

定義 3.1. 已知任意集合 $A \subset \mathbb{R}$, 如果 $\alpha \in \mathbb{R}$ 滿足

(1) $\forall a \in A, \quad a \leq \alpha$

(2) $\forall \epsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a > \alpha - \epsilon$

我們就稱 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是集合 A 的最小上界 (記爲 $\alpha := \sup A$)。

條件 (1) 告訴我們 α 是一個上界, 條件 (2) 則是說 α 往下降 ϵ 之後 $\alpha - \epsilon$ 便不再是最小上界了, 換句話說 α 的確是最小上界。有時我們把這性質稱爲最小上界公理。

現在不管是不是有理數, 就直接在實數線上砍一刀定義斷口 (A_1, A_2)

(1) $A_1 \neq \emptyset, \quad A_2 \neq \emptyset, \quad \mathbb{R} = A_1 \bigcup A_2$

(2) $\alpha_1 \in A_1, \quad \alpha_2 \in A_2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 < \alpha_2$

所有在 $\mathbb{R}$上的斷口 (A_1, A_2) 從最大值, 最小值的觀點來看可以分爲兩種情形:

(i) A_1 有最大, A_2 沒有最小値

(ii) A_1 沒有最大, A_2 有最小値

這裡所說的最大値, 最小值是實數值, 這點是與前面以有理數爲基礎最大的差別, 我們將上面這個性質稱爲實數的連通性或連續性。它的意思是在實數線上任意砍一刀, 所得到的斷口總是一個實數, 而且這個實數 (記爲 α) 表示爲

$$\alpha := \sup A_1 = \inf A_2$$

$$\alpha_1 \leq \alpha, \qquad \forall \alpha_1 \in A_1$$

$$\alpha \leq \alpha_2, \qquad \forall \alpha_2 \in A_1$$

我們可以取的更特殊 (利用有理數)

$$\alpha = \sup A, \qquad A \subset \mathbb{Q}$$

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n, \qquad a_n \in \mathbb{Q}$$

所以 Dedekind 的實數系是以最小上界 (sup) 或最大下界 (inf) 爲理論基礎。Cantor 對於實數的造法與 Dedekind 不同之處, 在於它沒有用到有理數是有序的這個事實, 他的出發點是 Cauchy 數列的集合。

§4. 實數的連續性原理 (完備性理論)

完備性有不同但等價的定義, 例如; 所有的Cauchy 數列都有極限, 單調有界數列必收斂, 有界的數列必有聚點, ... 等, 對 Dedekind 而言他的出發點是

任何單調有界的實數數列都有極限存在

定理 4.1 (Dedekind **原理**). 已知實數的兩個集合 $X, Y \subset \mathbb{R}$, $X \bigcap Y = \emptyset$ 且滿足

$$x < y, \qquad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

則存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $x \leq \xi \leq y$。

定理 4.2 (Cantor **原理**). 已知實數 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ 滿足 $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| \to 0$

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

則存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$。

定理 4.3 (Cauchy **原理**). 所有的 Cauchy 數列都有極限。

定理 4.4 (Weierstrass **原理**). 已知 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 是一遞增數列 $(a_{n-1} \leq a_n \leq a_{n+1})$ 且有上界 M, $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 則存在 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 換言之; 遞增且有上界的數列必收斂。

如果遞增數列換爲遞減數列, 上界換爲下界, 定理 4.4 仍然成立 (遞減且有下界的數列必收斂), 此時 $\alpha = \inf A = \inf\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$;
(1) $a \geq \alpha, \quad \forall a \in A$
(2) $\forall \epsilon > 0, \quad \exists a \in A \quad a < \alpha + \epsilon$

定理 4.5 (Archimedes **原理**). 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a > 0$, 則存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $na > b$, 換言之; $\lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} = 0$。

[註解]: 如果先假設 Archimedes 原理成立, 則定理 4.1−4.4 等四個連續性原理是等價的。

定理 4.6 (Bolzano, 1817). 已知 $M \in \mathbb{R}$ 是一個固定數, A 是實數的一個非空子集且有上界,

$$A \subset \mathbb{R}, \quad A \neq \emptyset, \quad \exists M, \quad \text{使得 } x \leq M, \quad \forall x \in A$$

則存在一實數 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $\xi = \sup A$。

證明: Bolzano 的想法是二分法, 由於 $A \neq \emptyset$, 可以選取一點 $\alpha_0 \in A$ 且 α_0 不是一個上界, 所以 $\alpha_0 \leq M$, 我們取一點 β_0 (可以是 M) 是一個上界, 然後取中間點 $\gamma = \dfrac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$, 此時有兩種可能性; 如果$\gamma$是 A 的上界, 則令 $\alpha_1 = \alpha_0$, $\beta_1 = \gamma$; 如果 γ 不是 A 的上界, 則令 $\alpha_1 = \gamma$, $\beta_1 = \beta_0$; 然後重複這個步驟可以造出一系列的區間 $[\alpha_n, \beta_n]$, 長度爲 $\beta_n - \alpha_n = (\beta_0 - \alpha_0)/2^n$, 其中 $\{\alpha_n\}$ 是遞增數列, $\{\beta_n\}$ 是遞減數列, 而且

$$[\alpha_0, \beta_0] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \cdots$$

其長度是依等比數列 $\{1/2^n\}$ 遞減, 因此

$$|\alpha_n - \alpha_{n+k}| \le \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \qquad |\beta_n - \beta_{n+k}| \le \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}$$

所以 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 都是 Cauchy 數列, 又因爲 $\beta_n - \alpha_n = (\beta_0 - \alpha_0)/2^n \to 0$, Cauchy 數列 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 有相同的極限, 記爲 ξ

$$\alpha_0 \le \beta_n \quad \Longrightarrow \quad \alpha_0 \le \xi, \quad \forall\, n$$

所以 ξ 是 A 的上界, 事實上 ξ 是 A 的最小上界, $\xi = \sup A$, 因爲$\forall \epsilon > 0$, $\exists \alpha_n$ 使得 $\alpha_n > \xi - \epsilon$。

Cantor-Méray 的實數系具有完備性, 那麼 Dedekind 的實數理論是否也有這性質呢? Cantor-Méray 的理論, 完備性 (completeness) 是以 Cauchy 數列來定義: 所有的Cauchy 數列都有極限。但 Dedekind 的理論是從斷口著手, 因此其它定義方式乃是必然的, 對 Dedekind 的理論而言, 利用上界, 下界的觀念是最自然不過的了!

這個定理說明了 Dedekind 的實數系統具有完備性, 因此是一個完備有序體 (complete order field)。然而 Cantor-Méray 與 Dedekind 造出的實數系是否相同? 是相同! Cantor-Méray 及 Dedekind 兩種實數系統之間存有一個一對一且映成的函數 f, 滿足下列關係: 令 a, b 表 Cantor-Méray 系統的實數, 而 $*$ 表四則運算, 則 $f(a*b) = f(a)*f(b)$, 且若 $a \ge b$ 則 $f(a) \ge f(b)$, 有一定理：完備有序體只有一個。然而 Cantor-Méray, 及 Dedekind 的實數系皆爲完備有序體, 所以這二個實數系統 “相同”。

参考文獻

1. E. T. Bell, Men of Mathematics, New York, 1937.
   (中譯本: 大數學家, 九章出版社, 1998。)
2. E. Hairer and G. Wanner, Analysis by Its History, UTM *Reading in Mathematics*, Springer-Verlag, 1995.
3. S. Hollingdale, Makers of mathematics, Penguin Books, 1994.
4. Herbert Meschkowski: 偉大數學家的想法, 洪萬生譯, 南宏出版, 1978。
5. Dirk J. Struik, A concise History of Mathematics, Dover, New-York, 1967.
   (中譯本: 數學史, 吳定遠譯, 水牛出版社印行, 1982。)
6. Dunham William, Journey Through Genius, *the great theorems of mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1990, Penguin Books, 1991.
   (中譯本: 天才之旅, 偉大數學定理之創立, 林傑斌譯, 牛頓出版股份有限公司, 1995。)
7. 胡作玄, 引起紛爭的金蘋果, 哲人數學家 — 康托爾, 業強出版社, 1997。

—本文作者任教國立交通大學應用數學系—