Euler (1707-1783) — 數學的莎士比亞

林琦焜

"Lisez Euler, Lisez Euler, c'est notre maître à tous."

Read Euler, read Euler, he is the master of us all.

— Laplace (1749–1827) —

這是法國著名數學家 Laplace 常常對青年數學家所說的一段話, 譯爲中文意思是「讀 Euler, 讀 Euler, 他是我們全能的大師。」

第一次對 Euler 有印象是由於 Euler 公式

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$$

還記得高中二年級學三角函數的情景, 和差化積, 積化和差 ... 等等一大堆三角恆等式。依稀記得老師上課第一件事就是把那些公式書寫在黑板上, 然後接著就看他表演, 這裡要用公式 (1), 那裡要用公式 (2) ... 看得目瞪口呆, 但坦白而言, 那實在是很痛苦的經驗。如此迷迷糊糊過了一個學期, 放假期間內心實在很不甘願, 於是買了幾本關於三角函數的參考書偶然間看到 Euler 公式, 由此公式 (當然要加上一點點複數的常識) 很容易就可推導出許多的三角恆等式, 從此就沒有忘記 Euler 公式, 但 Euler 是誰, 我還是不知道。(對高中生而言, 他所關心的只是大學聯考, 會有誰想去追根究底問 Euler 是誰!)

眞正促使自己想更深入去認識 Euler, 則是在看完一篇訪談記錄「與大數學家一席談 (凡異出版社)」。作者問 George Polya, 在歷史上對他影響最深的數學家? 他回答: "Euler", 原因是 Euler 做了一些跟他才能相當的偉大數學家從沒有做過的事, 就是: *他解釋了他是如何發現他的結果*。這豈不是我們學習過程中最需要的嗎? 我們在唸書時碰到的困難就是: *它們是如何被發現的*? 爲了眞正理解一門理論你必須知道它是怎麼發現的, 除非一個人瞭解一門理論是如何被發現的, 否則便無法理解它。Polya 這段話深深打動我的內心, 因此決定好好認識 Euler。

自1263年起, 瑞士的 Basel 就是歐洲的許多自由城市之一, 在17世紀之前逐漸成爲貿易與商業的重鎭。而大學之所以能成爲學術研究的中心, 主要是由於 Bernoulli 家族的影響。這個家族是由 Nicholas Bernoulli (1623-1708) 所建立。他有三個兒子 Jacob 一世 (1654-1705), Nichcolas 一世 (1662-1716), Johannes 一世 (1667-1748), 其中 Jacob 一世研究神學, 而 Johannes(或 John) 研究醫學, 但當 Leibniz(1646-1716)

在 Acta Eruditorum 的文章發表之後, 兩人都決定跟隨 Leibniz 成為數學家。Jacob 擔任 Basel 大學的教授直到1705年逝世。John 則在 Gromingen 任職, 直到 Jacob 過世才繼承他哥哥在 Basel 大學的數學講座, 並一直在那裡住了43年之久。

我們的主角 Leonhard Euler(1707-1783) 的父親是 Paul Euler(1670-1745) 年輕時在 Basel 大學學神學, 由於他自己對數學也很有興趣, 因此這段時間也曾跟過 Jacob Bernoulli 學數學, 實際上在大學階段 Paul Euler 與 John Bernoulli 都曾經一起在 Jacob Bernoulli 的家住過。Paul Euler 畢業之後成為路德會的牧師。Leonhard Euler 於1707年4月15日生於瑞士的 Basel, 但第二年就搬到附近的鄉村 (Riehen)。

及至就學年齡, Leonhard Euler 被送到 Basel 的學校就讀, 這期間他與外祖母同住。這是一個貧瘠的學校, 學不到什麼數學然而他對數學的認識則是由於他父親的教導與自己的獨立學習。Paul Euler 本人也是個有造詣的數學家, 他曾是 Jacob Bernoulli 的學生, 這位父親希望 Leonhard Euler 也步他的後塵成為一傳道人, 孝順的 Leonhard Euler 於是在父親的安排下進入 Basel 大學學習神學, 希臘文與希伯來文。這時由於 Leonhard Euler 所展現的數學才華, 馬上被 John Bernoulli 所注意, 他熱心地每週給這個年輕人上一次課, Leonhard Euler 總是工作一整個星期, 然後星期天下午在約定的時間內請求 John Bernoulli 的指導, John Bernoulli 也同時推介他看更深一點的數學。

Euler於1723年完成哲學碩士學位, 其論文是探討並比較笛卡兒 (Descartes) 與牛頓兩人哲學概念的差異性。隨即遵從其父親的願望開始學習神學, 然而縱使他是一個虔誠的基督徒, 卻始終無法在神學、希臘文、希伯來文之中找到他在數學中所能得到的學習熱忱與熱情。後來他父親終於在 John Bernoulli 的勸說下, 同意 Euler 改讀數學, 從此展開他燦爛的學術生涯, 後來也應驗了 Bernoulli 父子的預言 (勸說其父的話):

> 「Euler 註定要成為大數學家而非 Riehen 的牧師。」

Euler於1726年完成在 Basel 大學的學業, 在這期間他接受 John Bernoulli 的建議與指導, 研讀了 Varignon、笛卡兒、牛頓、伽利略、Von Schooten、Jacob Bernoulli、Hermann、Taylor(泰勒) 與 Wallis 等人的著作。Euler 第一篇數學論文是“On isochronous curves in a resisting medium”是一篇短文, 而他眞正展露頭角的是19歲時, 1727年巴黎科學院提出船桅問題懸賞徵答。頭獎是由 Bouguer 所得, Euler 則由於漂亮的分析出船桅之最佳位置的選擇而得第二名獎章。(有趣的是 Euler 此時甚至還沒有見過海上航行的船隻。)

在18世紀的歐洲, 大學並不是學術研究的中心, 主要的研究任務是由慷慨並有遠見的統治者所資助的皇家科學院所擔當。這期間則以柏林, 巴黎與聖彼得堡三個地方最出色。John Bernoulli 有三個兒子, 其中兩個 Nicholas 二世 (1695-1726) 與

Daniel(1700-1782) 都是數學家而且與 Euler 是私交甚篤的好友, 他們二人在 1725 年前往俄國的聖彼得堡科學院, 這是依照彼得大帝的遺願所建立的一個能夠與巴黎、柏林科學院相抗衡的學術殿堂。透過 Daniel Bernoulli 的影響, Euler 也獲得聘任。但最開始的職位是在醫學院的生理學部門, 爲此他人還在瑞士的 Basel 時便全心投入生理學的研究, 並發表了以偏微分方程中的波動方程來描述聲音的傳遞。這件早期的研究卻一直貫穿到 Euler 一生的工作。就在他踏上俄羅斯土地的那一天, 開明的凱薩琳一世女皇去世了, 在那段混亂的日子, Euler還曾經擔任過俄國海軍醫官的特別工作, 後來才溜進數學部門。此後, 當環境與條件好了一點之後, Euler 便專心投入研究工作。整整有6年的時間幾乎終日埋首於書堆。這倒不完全是因爲他被數學所吸引, 部份原因則是由於外面政治環境險惡, 使他不敢進行正常的社交活動。

1733年 Daniel Bernoulli 離開俄羅斯回到自由的瑞士在 Basel 任教授, 他所空下的職位就由 Euler 接替, 26歲的他就此坐上科學院的第一把數學交椅。由於經濟上的改善, 並感覺自己以後的生活要固定在聖彼得堡, 於是在1734年元月7日與 Catharina 結婚, 她是彼得大帝帶回俄羅斯的瑞士畫家 Gsell 的女兒。他們有13個孩子, 但除了5個之外, 其他在很小的時候便過世。Euler是一個仁慈寬厚且喜歡小孩子的人, 他自己宣稱有很多重要的研究結果是他一手抱著嬰兒, 而較大的孩子圍著他玩時完成的。

> 「他是有史以來最多產的瑞士科學家, 也是一位不可思議的數學幻想家。他在任何領域中都能發現數學, 在任何情況下都能進行研究......」

Euler一直在俄羅斯待到1741年, 在此之前他分別在1738, 1740年得過法國巴黎科學院的大獎, 這個時期最重要的著作之一是1736年關於力學的一篇論文。Euler所著力學 (Mechanica, sive motus scientia analytice exposita; 1736) 一書, 是第一本以解析的方法來發展牛頓關於質點運動的教科書。

這以後 Euler 在 Berlin 度過了24年, 雖然最開始的氣氛很好, 如 Euler 在一封給朋友的信提到:

> 「我可以隨意做我希望做的事 (關於研究), ... 國王 (指腓特烈大帝) 稱我爲他的教授, 我想我是世界上最快樂的人。」

但日子並不都是愉快的。原因是腓特烈大帝喜歡的是圓滑的廷臣而不是單純的 Euler, 尤其 Euler 很不喜歡當時的一些人, 例如伏爾泰 (Voltaire)。後來法國數學家 D'Alembert 被邀請來柏林, 雖然他和 Euler 在數學上有一些齟齬, 但並不是那種是非不分讓個人的不和影響判斷的人。他直率地對腓特烈說:「沒有任何一個現今活著的數學家可以取代 Euler 的位置。」「把任何其他數學家置於 Euler 之上都是侮辱。」但這個忠告

卻使得腓特烈更加生氣與執拗! Euler的處境變得更加無法忍受。他感到他的孩子們在普魯士不會有任何前途, 終於在59歲 (1766年) 接受凱薩琳女皇二世的邀請再次舉家遷到聖彼得堡, 一直到他過世 (1783年)。

相對於牛頓的內向, 退縮, 神經質。Euler 則是樂觀且仁慈寬厚, 甚至於1771年眼睛完全瞎掉, 仍保有樂觀的性格, 雖然在幾乎完全失明之下, Euler仍藉由口述給他的助理 (實際上就是他的兒子 Albert Euler), 來繼續他未曾停歇的數學創作。在後來的17年中 Euler 繼續發展著數學, 如果說有什麼不同, 那就是他比以前更多產。他的智慧使他能巧妙地把握各種概念和想法而無需將它們寫在紙上, 他非凡的記憶力使他的頭腦有如一個堆滿知識的圖書館。

Euler是歷史上最多產的數學家, 跟他同時代的人稱他是"分析的化身"。他是近代三大數學家之一 (另兩位是高斯 (Gauss), 黎曼 (Riemann)), 而顯然後兩位都深受 Euler 的影響。他對數學分析的貢獻, 可以媲美歐幾里德 (Euclid) 對幾何 (古希臘數學) 的貢獻。

雖然 Euler 本人並不是一位老師 (因爲在科學院工作), 但卻比任何人對數學教學有更深遠的影響, 最主要原因就是來自於他所寫的教科書"無窮微量解析入門":

1. Introductio in Analysis Infinitorum (1748)
2. Institutiones Calculi Differentialis (1755)
3. Institutions Calculi Infegralis (1768–1794)

這套書可以媲美歐幾里德的"幾何原本", 其影響之深遠甚至後來的書大部分都是其翻版而已!

Euler在"無窮微量解析入門"一書中首次將指數e和指數函數e^x 放在分析學 (analysis) 的中心位置, 在他之前人們都將指數函數 (exponential function) 視爲對數函數 (logarithmic function) 的反函數, Euler則把兩者立在對等的基礎上並分別定義如下:

$$e^x \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$
$$\ln x \equiv \lim_{n\to\infty} n(x^{1/n}-1)$$

直觀來看, 令 $y=(1+\frac{x}{n})^n$ 則 $x=n(y^{1/n}-1)$, 然後再取極限, 當然最後這個步驟是很有爭議有待商確, 但記得 Euler 那個時代仍是分析的草創期, 對數學的嚴格性之要求還沒有那麼高。最早出現 e 是在他所著力學 (Mechanica 1736) 一書, Euler爲甚麼選取 e 來代表指數呢? 除了指數 (exponential) 的字首是 e 之外, 最有可能是因爲 a, b, c, d 已經常常出現, 所以 e 就成爲最優先的候選者, 而似乎不太可能以他的姓 (Euler) 的字首來取的, 因爲他是一個極謙虛的學者, 時常將他的成果延後發表以使得他的同事與學生得到名譽, 但無論如何, e 像其它 Euler 所選取的符號已成爲普世公認且使用的符號。Euler由他的定義出發證得

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots(*)$$
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

這正是指數函數e^x的 Taylor 級數。

Euler在"無窮微量解析入門"另一個重要的工作是連分數 (continuous fraction), 例如;

$$\frac{13}{8}=1+\frac{5}{8}=1+\frac{1}{\frac{8}{5}}=1+\frac{1}{1+\frac{3}{5}}$$

Euler證明: 所有有理數都可以寫成有限的連分數, 而無理數則可以寫成無限的連分數。例如 $x=\sqrt{2}-1$ 是二次方程式的根

$$x^2+2x=1 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{2+x}$$

右式分母的 x 再取代爲 $\frac{1}{2+x}$ 則

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}$$

同理可得

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}}}$$

依此類推第 n 步等於

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{\vdots}{2+\cfrac{}{2+x}}}}}$$

令 $n\to\infty$ 所以 $\sqrt{2}$ 可表爲無限的連分數

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

如果考慮二次方程式

$$x^2=ax+1 \quad\Longrightarrow\quad x=a+\frac{1}{x}$$

則

$$x=a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cdots}}}}$$

例如; 黃金分割 $(a=1)$

$$x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

黃金分割 (golden mean) 之起源可以這麼看: 已知一矩形長寬分別等於 x 與 1, "若是長與寬的比例等於寬與長減去寬之後的比例。" 這個比例就是黃金分割,

$$\begin{aligned} & \frac{x}{1}=\frac{1}{x-1} \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2-x-1=0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\approx 1.618 \end{aligned}$$

由黃金分割之連分數不難看出它是收斂最慢的連分數, 所以黃金分割是最爲 無理 的無理數。

Euler也證明如何將無窮級數寫成無限的連分數還有如何將無限的連分數寫成無窮級數, 例如由 $(*)$ 可得 e 的無限連分數

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cdots}}}}}$$

$$\sqrt{e}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}}}$$

Euler也求得 π 的無限連分數

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}}$$

法國數學家 Lambert(1728–1777) 利用這結果於1768年導出 $\tan x$ 的無限連分數

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{x-x^3/6+x^5/120-\cdots}{1-x^2/2+x^4/24-\cdots}$$

$$=\cfrac{x}{\cfrac{1-x^2/2+x^4/24-\cdots}{1-x^2/6+x^4/120-\cdots}}$$

令 $x\to 0$, 最後一個分母趨近於3故

$$\tan x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\cdots}}}$$

同理可得下一個分母分別是5, 7, 9, $\cdots$ 所以

$$\tan x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\cdots}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}-\cdots}}}}$$

過了將近30年, 法國數學家 Legendre(1752-1833) 才於1794年給出嚴格的證明。Lambert藉由 $\tan x$ 的無限連分數證明對所有的有理數 $x\neq 0$, $\tan x$ 總是一個無理數, 他還證明 e^x, $\sin x$, $\cos x$, 都是無理數, 既然 $\tan\frac{\pi}{4}=1$ 不是無理數, 所以 π 是一個無理數。

Euler解釋數學非常清楚, 其仁慈寬厚的個性也表露在字裡行間, 他不是那種只能

看透問題的本質, 卻無法將其思想傳遞給他人的刻板數學家, 相反地, 他深深地關心教學的工作。

> 「*He preferred instructing his pupils to the little satisfaction of amazing.*」
>
> — Condorcet —

他總是下功夫把有關的資料細心的, 詳盡的, 有條理地寫下來。他講得令人心悅誠服, 且忠實地將內心的思想過程告訴讀者, 因此他所寫的或所講的都是自己有心得, 有感受的成果, 也因此特別感人親切。因爲一個眞正好的作者, 只用那些使自己獲得深刻印象的事物去影響他的讀者。

他的影響是如此之深, 甚至在今天, 我們仍可看到他的足跡, 例如

$f(x)$: 表示函數 (1734)

e: 自然對數 log 之底 (1727)

π: 圓周率 (1755)

$\sum$: 求和之符號 (1755)

$\Delta y, \Delta^2 y \cdots$ (差分) (1755)

$i=\sqrt{-1}$ (-1的平方根) (1777)

另一件事値得提的是在柏林的時候, 爲著向腓特烈大帝的姪女介紹力學、光學、天文學、聲學等, Euler特別撰寫頗受讚譽的「致一位德國公主的信」。後來這些信廣爲流傳且被翻譯成七種不同語言的單行本。

大概 Euler 最廣爲人知且最有趣的工作是1735年證明

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

這是 Jacob Bernoulli 所提的, 這問題曾難倒 Jacob Bernoulli、John Bernoulli、Daniel Bernoulli、甚至包括 Leibniz、Stirling、deMoivre ... 等人, Euler利用根與係數的觀念, 與他自己的特殊方法, 還得出一系列的成果

$$\begin{aligned}
\zeta(4)&=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots\\
&=\frac{\pi^4}{90}\\
\zeta(6)&=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots\cdots\\
&=\frac{\pi^6}{945}\\
\zeta(8)&=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\cdots\cdots\\
&=\frac{\pi^8}{9450}\\
\zeta(10)&=1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\cdots\cdots\\
&=\frac{\pi^{10}}{93555}\\
\zeta(12)&=1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\cdots\cdots\\
&=\frac{691\pi^{12}}{638512875}
\end{aligned}$$

在1737年, 他更證明了函數與質數之關係

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{\{p\,:\,\text{prime}\}}(1-p^{-s})^{-1}$$

關於Euler 的工作, 我們簡單介紹如下:

● 數論 (Number Theory)

Euler 關於數論的工作似乎是受 Goldbach (1690-1764) 之激勵, 但很可能最開

始是由於 Bernoulli 對數論的興趣。1729年 Goldbach 問 Euler 是否知道費馬的猜測:

$$2^n+1, \quad n=1,2,2^2,2^3,\ldots$$

這些數是質數? Euler 逐一驗證, 並在1732年證明

$$2^{32}+1=4294967297$$

可以被641整除, 因此不是質數, 他同時也研究費馬其他沒有證明的結果, 爲此 Euler 引進一新函數 $\varphi(n)$: 表示所有小於 n 並與 n 互質的質數之個數。1749年他也證明了費馬另一個斷言, 若a, b互質則 a^2+b^2 沒有 $4n+1$ 形式的因數。僅僅 Euler 對數論的工作就足以使他名垂千古。他在數論另一發現是二次互反律 (law of quadratic reciprocity)。他是歷史上第一位對費馬最後定理取得決定性進展的數學家。

• Euler 公式 (Euler identity)

1740年10月18日, Euler 寫給 John Bernoulli 的信上討論到微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=0 \quad (\star)$$

Euler說這個微分方程的解可表爲兩種形式

$$y(x)=2\cos x$$
$$y(x)=e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}$$

我們可以直接驗證這兩個函數都是微分方程 $(\star)$ 的解, 因此由微分方程的唯一性可得

$$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$$

同理可推想 Euler 也知道

$$2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$$

一年之後 Euler 寫了另一封信給德國數學家 Christian Goldbach 提到他觀察到一近似值

$$\frac{2^{\sqrt{-1}}+2^{-1\sqrt{-1}}}{2}\approx\frac{10}{13}$$

左式等於 $\cos(\ln 2)$, 而實際計算, 發覺 $\frac{10}{13}$ 與 $\cos(\ln 2)$ 的近似值可精確至小數點第六位!

最後 Euler 在1748年將公式

$$e^{\pm ix}\equiv\cos x\pm i\sin x$$

發表在他的書 “Introductio in Analysis Infinitorum”, 今天我們習慣稱爲 Euler 公式, 這是關於三角函數理論最漂亮的公式之一, 這公式因此成爲三角函數, 複數與指數函數之橋樑。而它本身正告訴我們如取特殊的 $x=\frac{\pi}{2}$, π, 2π 則 $\cos x+i\sin x$ 之值等於

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i, \quad e^{i\pi}=-1, \quad e^{2\pi i}=1$$

試想若由無窮級數來看 $e^{2\pi i}$ 是何等的複雜, 然而由 Euler 公式卻輕鬆地告訴我們 $e^{2\pi i}=1$, 讀者有興趣可以看另一個令人驚奇的例子

$$i^i=(e^{\frac{\pi}{2}i})^i=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

其中最特別的是

$$e^{\pi i}+1=0$$

Euler非常喜愛這個公式, 並宣稱這是最美麗的數學公式, 他熱愛到將這公式刻在皇家科學院的大門上。這式子有 1, 0分別是乘法、加

法這兩個基本運算系統的單位元素, 整個數字系統最根本的概念, 還有三個運算方法 — 加、乘與次方。兩個特別的數: 指數 e 與圓周率 π, 再加上 i 這個虛數單位。這個公式也成爲 Lindemann (1852–1939) 在1882年證明 π 是超越數的工具, 從此也結束了化圓爲方的美夢。

從棣美弗公式 (de Moivre's formula) 來看 Euler 公式是很直觀, 當然你需要一點勇氣進入複數世界

$$(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

令$\varphi = \frac{x}{n}$, 則

$$\cos x + i\sin x = \Big(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\Big)^n$$

這等式對所有的n都成立, 因此我們考慮極限情形 $(n\to\infty)$

$$\cos\frac{x}{n}\approx 1, \qquad \sin\frac{x}{n}\approx\frac{x}{n}$$

故有充足的理由相信

$$\cos x + i\sin x = \lim_{n\to\infty}\Big(1+i\frac{x}{n}\Big)^n = e^{ix}$$

當然這推導是不嚴謹的, 但是卻相當直觀, 嚴格的證明則有賴無窮級數之理論

$$e^y = 1+y+\frac{1}{2!}y^2+\frac{1}{3!}y^3+\frac{1}{4!}y^4+\frac{1}{5!}y^5+\cdots$$

令$y = ix$, 則由 $\sin x$ 與 $\cos x$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \\ &\quad \frac{1}{4!}(ix)^4 + \cdots\cdots \\ &= (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots) + \\ &\quad i(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots) \\ &= \cos x + i\sin x \end{aligned}$$

其實, 同樣的手法也出現在 Bernoulli 計算積分 $\int_0^1 x^x\,dx$, 首先

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln x}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^x\,dx &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x\ln x)^k}{k!}\Big)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1 (x\ln x)^k\,dx \end{aligned}$$

由分部積分容易證明

$$\int_0^1 (x\ln x)^k\,dx = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

又因爲 $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^x\,dx &= 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}-\cdots \\ &\approx 0.78343 \end{aligned}$$

John Bernoulli 從單位圓面積之計算過程也證明了 $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$:

$$A = \int_0^1 y dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

變數變換

$$u = ix\,, \qquad x = -iu\,, \qquad dx = -idu$$

因此單位圓面積 A 等於

$$\begin{aligned} A &= \int_0^i \sqrt{1-(-iu)^2}(-idu) \\ &= -i\int_0^i \sqrt{1+u^2}du \end{aligned}$$

由積分公式可得

$$\begin{aligned}A&=\frac{\pi}{4}\\&=-i\left(\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^i\\&=-\frac{1}{2}i\ln(i)\end{aligned}$$

所以

$$i\ln(i)=-\frac{1}{2}\pi \quad\Longleftrightarrow\quad i^i=e^{-\pi/2}$$

• Beta 與 Gamma 函數

在 Euler 的教科書“Institutiones calculi integralis”, 他詳細地研究並討論可表示爲基本函數 (多項式, 指數, 三角, 對數, 雙曲等函數) 的積分, 他同時也探討 Beta 與 Gamma 函數 (Euler 於1729年引進這兩個函數)。最早 Legendre 稱爲 Euler 第一類與第二類積分, 現在這個名稱則分別是由 Binet 與 Gauss 所取的。

• Fourier 級數

Euler 也開創了 Fourier 級數, 在1744年寫給 Goldbach 的信中提到三角級數與函數之關係

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}a^n(\cos x+i\sin x)^n\\&=\frac{1}{1-a(\cos x+i\sin x)}\end{aligned}$$

但另一方面由 de Moivre's (棣美弗) 定理可知

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}a^n(\cos nx+i\sin nx)\\&=\frac{1}{1-a(\cos x+i\sin x)}\end{aligned}$$

利用複數之運算後, 分成實部與虛部得

$$\frac{a\cos x-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx$$
$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty}a^n\sin nx$$

令$a=\pm 1$

$$\frac{1}{2}=1\pm\cos x+\cos 2x\pm\cos 3x+\cos 4x\pm\cdots$$

(這個級數實際上是發散的!) 然後積分

$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots,\quad 0<x<\pi$$
$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots,\quad -\pi<x<\pi$$

第二式再積分

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}=-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 4x-\cdots$$

但這結果則遲到1755年才發表。

• 偏微分方程 (partial differential equation)

1748年 Euler 從法國數學家 Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 的研究成果出發, 推導出琴弦振動的“波動方程”(wave equation)。它是建立在牛頓力學的基礎上, 描述波形變化率的二階微分方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

實際上這是一個偏微分方程 (partial differential equation), 換句話說, 除了時間的變化率之外, 還描述空間的變化率, 亦即波沿著琴弦方向的變化。波動方程其內涵就是牛頓定律, 它是一個數學語言, 用來描述物理的現象:

> 琴弦每一點的加速度都與這一點所受的拉力成正比。

在此之前1727年 Daniel Bernoulli 就研究了波動方程, 根據其理論最一般的解可以表示爲無限多個正弦波的疊加 (即三角級數)。因此與 Euler 的結果有所差異, 後來 Lagrange 也加入這場論戰, 整個問題是那種函數才可以表示成三角級數之和。這個問題一直等到法國數學家 Fourier 才完全解決, 而 Fourier 級數就是這一場近百年論戰的成果與結晶。

Euler於1759年將注意力轉移到鼓皮的振動, 且再度推導出一個波動方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

它描述鼓面在垂直方向的位移如何隨時間而變化, 其物理意義是鼓面上每一點的加速度都正比於周圍鼓面對它所施加的平均拉力。這個偏微分方程與一維波動方程非常相似, 不同的是它含了兩個獨立方向的空間 (二階) 變化率。Euler 考慮這個問題做分離變數得到了 Bessel 方程, 他並利用 Bessel 函數來解這個常微分方程 — Bessel 方程。

● 微分幾何 (differential geometry) 與拓樸 (topology)

Euler對微分幾何有極重大的貢獻, 他研究了曲面與曲面之曲率, 許多在這方面未發表的成果, 後來由 Gauss 重新發現。關於多面體的研究, 是 Euler 得著名的公式

$$\chi(Q)=V-E+F=2 \qquad \begin{cases} V: & \text{頂點數} \\ E: & \text{稜線數} \\ F: & \text{面數} \end{cases}$$

如果有 g 個洞的多面體 (或曲面), 則

$$\chi(Q)=V-E+F=2-2g$$

χ 稱爲曲面 Q 之 Euler 特徵數 (Euler characteristic), $g=\frac{2-\chi(Q)}{2}$ 則是曲面 Q 之虧格數。χ 與 g 都是拓樸不變量, 正好提供我們如何來對曲面做分類。另外, Euler 對拓樸所做的貢獻就是著名的科尼斯堡 (königsberg) 七橋問題。他將之化爲網路的問題, 因此變成是否可以一筆畫畫圖 的問題, 這成果在電路學、經濟學都有實際之應用。

● 古典力學與流體力學

在 Euler 那個時代, 並沒有什麼純數學、應用數學之分。對他而言, 整個物理世界的不同現象, 都是他發展出來之分析方法的研究對象。古典力學的基礎是由牛頓所奠定, 而 Euler 則是主要的建築師。1736年, 他首先清楚地介紹質點 (mass–point particle) 的概念, 同時他也是第一位研究在任意曲線運動之質點加速度, 並引進向量之概念

與速度、加速度相連繫。流體力學的基礎是由 Euler 所建立, 他導出了連續方程式 (the continuity equation), Laplace 速度位方程 (Laplace velocity potential equation), 還有無黏性不可壓縮流體方程, 我們稱之爲 Euler 方程, 至今仍是研究流體力學最基本的方程式。借用 Lagrange 的話, Euler並不是促成了流體力學, 而是創造了流體力學。當然這門學問後來經由 Lagrange 修飾而變得更華美。但採取决定性步驟的榮譽則是屬於 Euler。我們可以如此比方, 牛頓奠定了力學的地基, Euler 造了地板與牆壁等結構, 而 Lagrange 則把它裝飾成賞心悅目之宮室。

Euler與牛頓、Leibniz 一樣都屬於新數學理論的開拓者, 其後的整理工作與嚴格證明則留給新一代的數學家 Jean-Rond D'Alembert (1717-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) 與 Augustin Louis Cauchy (1789 -1857) 並一直沿續到二十世紀。在 Osserman 所著「宇宙的詩篇」([10]) 中他將 Euler, Gauss, Riemann 在數學界的地位比喻爲樂壇上的三 B: 巴哈、貝多芬、布拉姆斯。而 George F. Simmons ([12]) 則更正確地將 Euler 比擬爲數學界的莎士比亞 (the Shakespeare of Mathematics)

> 普世性, 鉅細靡遺, 取之不盡, 用之不竭。
> *Universal, richly detailed, and inexhaustible.*

雖然 Euler 過世有兩百多年, 但他今天仍然活在數學的每個角落。

參考文獻

1. E. Artin, The Gamma Function, trans. M. Butler, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
2. Raymond Ayuob, Euler and the Zeta Function, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 1067–1086.
3. E.T. Bell, Men of Mathematics, New York, 1937. (中譯本: 大數學家; 九章出版社, 1998。)
4. Phlip J. Davis, Leonhard Euler's Integral: A historical profile of the gamma function, Amer. Math. Monthly, 66(1959), 849–869.
5. Leonard Euler, An Introduction to the Analysis of the Infinite, Springer-Verlag, 1990.
6. E. Hairer and G. Wanner, Analysis by Its History, UTM *Reading in Mathematics*, Springer-Verlag, 1995.
7. Omar Hijab, Introduction to Calculus and Classical Analysis, Springer-Verlag, 1997.
8. Lloyd Motz and Jefferson Hane Weaver, The Story of Mathematics, Avon Books, New York, 1994.
9. Paul J. Nahin, An Imaginary Tale: The Story of $\sqrt{-1}$, Priceton Univ. Press, 1998.
10. R. Osserman, Poetry of the Universe: A mathematical exploration of the cosmos, 1995. (中譯本: 宇宙的詩篇: 解讀天地間的幾何法則; 葉李華, 李國偉譯; 天下文化: 科學人文 29, 1997。)
11. R. Remmert, Classical Topics in Complex Function Theory, Springer-Verlag, 1997.

12. George F. Simmons, Differential Equations with Applications and Historical Notes, 2nd Ed., McGraw-Hill, 1991.
13. Dirk J. Struik, A concise History of Mathematics, Dover, New-York, 1967. (中譯本: 數學史; 吳定遠譯; 水牛出版社印行, 1982。)
14. Dunham William, Journey Through Genius, *the great theorems of mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1990, Penguin Books 1991. (中譯本: 天才之旅, 偉大數學定理之創立; 林傑斌譯; 牛頓出版股份有限公司, 1995。)
15. 波利亞著, 數學發現、數學與猜想, 九章出版社。
16. 巴爾佳斯基, 葉弗來曼維契著, 拓樸學奇趣, 亞東書局。
17. 傅溥譯, 數學漫談, 時代生活雜誌社, 美亞圖書公司。
18. Simon Singh, 費馬最後定理, 薛密譯, 臺灣商務印書館出版, 1998。
19. 阿米爾·艾克塞爾著, 費馬最後定理, 林瑞雲譯, 時報出版, 1999。

—本文作者任教於國立成功大學數學系暨應用數學研究所—