101 年博士班入學離散數學試題

2012 年 5 月 8 日

1. 假設某選區有 40 萬選民，五位候選人，得票最高兩位可當選立法委員。假設沒有廢票且一次選舉即能確定結果，試回答下列問題：
   (a) (5 分) 當選立法委員的最低得票數可能是多少。
   (b) (5 分) 落選的最高得票數可能是多少。
   (c) (5 分) 在完全不知其他候選人得票情形下，一候選人剛好得到多少票時，可逕行宣布當選。

2. 連擲骰子三次，試回答下列問題：
   (a) (10 分) 數字和的期望值為多少。
   (b) (10 分) 數字和為偶數且至少出現一個 6 的機率是多少。

3. 考慮 13 個元素的重複集 (multiset) $S=\{A,A,A,B,B,B,C,C,C,D,D,D,D\}$，試回答下列問題。
   (a) (10 分) S 有幾種 3 元素子集。
   (b) (10 分) S 進行分割的方法數為何。

4. 令 $\mu:\mathbb{N}\to\{-1,0,1\}$ 為一函數滿足

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^k, & \text{當 } n \text{ 可表為 } k \text{ 個相異質數乘積;}\\ 0, & \text{其它情形。}\end{cases}$$

   如 $\mu(12)=0$ 及 $\mu(30)=-1$。符號 $i|n$ 表正整數 i 整除正整數 n。
   (a) (10 分) 試利用二項式定理證明

$$\sum_{i|n}\mu(i)=\begin{cases}1, & \text{當 } n=1;\\ 0, & \text{當 } n\neq 1\text{。}\end{cases}$$

   (b) (10 分) 試利用 (a) 的結果及乘法展開解釋 $(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-5})(\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)n^{-5})=1$。

5. (15 分) 假設圖 G 為一點集為 $X\cup Y$ 的二分圖，其任意邊均一端點在 X 上及另一端點在 Y 上，且任意 X 上的點都剛好連接 5 條邊及任意 Y 上的點都連接不超過 5 條邊。試證 G 上有五組大小為 $|X|$ 的配對。(一組配對為一邊集，其中任兩邊均無共同點)

6. (10 分) 令 $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ 為一有兩元素的體 (field). 試證任意函數 $f:\mathbb{F}_2^m\to\mathbb{F}_2$ 都能表成 m 變數 $x_1,x_2,\ldots,x_m$ 之多項式。