國立交通大學應用數學系
九十九學年度大學甄選入學考試試題

說明：

(1) 答題前，請先檢查答案本封面上之編號是否與座位上之編號相符。

(2) 本試卷共有六大題（3頁試題），總分共計100分，測驗時間為100分鐘。

(3) 作題時，必須要寫下計算過程，若是僅有答案，則該題不允計分。

$\boxed{\text{第一題}}$ (20分)

(1) (10分) 假設 n 為大於 1 的正整數，已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 為任意非負實數。試證明

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n \leq \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n}$$

並給出且證明等號成立時的條件。

(2) (7分) 假設 a, b 和 c 為任意非負實數。試證明 $a \times b \times c \leq \dfrac{a^3}{648} + \dfrac{8b^3}{3} + 9c^3$ 並給出等號成立時的條件。

(3) (3分) 假設 a 和 b 為任意非負實數。試證明 $a \times b \leq \dfrac{a^2}{18} + 5b^2$ 並給出等號成立時的條件。

$\boxed{\text{第二題}}$ (20分)

(1) (10分) 假設函數 $f(x)$ 是從 $[0,1]$ 對應到實數且對任意的 $x, y, \lambda \in [0,1]$ 滿足 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$。試證明

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)$$

對任意的 $x_1, x_2, x_3 \in [0,1]$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$。

(2) (10分) 試證明 給定任意三角形 ΔABC

$$\sin(\angle A) + \sin(\angle B) + \sin(\angle C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

恆成立。

第三題 (15分)

(1) (5分) 試於同一座標上繪出 $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ 在 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的圖形。

(2) (2分) 試問 當 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 則 $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ 是否正確？

(3) (4分) 試問 邊長爲 1 的正六邊形面積爲何？

(4) (4分) 假設 $y = \cos\theta + \sin\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 試問 y 的範圍爲何？

第四題 (15分)

假設 r 爲一正實數，S_1 與 S_2 爲兩球面：

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$
$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

(1) (5分) 當 $r = 3$ 時，試證明 S_1 與 S_2 相交於一圓。

(2) (3分) 若 S_1 與 S_2 相交於一圓，試問 r 的範圍爲何？

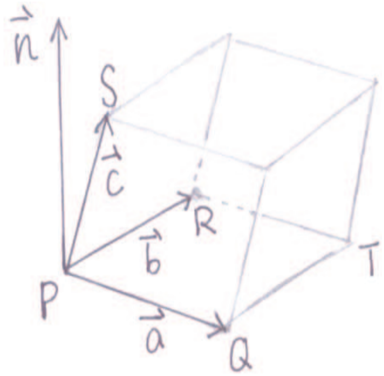
(3) (7分) 試問 當 r 爲何值時，S_1 與 S_2 可交出最大的圓？

第五題 (15分)

某癌症在某區域有 6% 的罹患率，假設有兩種診斷法來檢驗此癌症：A診斷法, B診斷法。

(1) (6分) 用A診斷法，從罹患者中檢驗出罹患此癌症的機率是 90%，而未罹患者中檢驗出患病的機率是 4%。試問 用A診斷法檢驗出患病者中，確實罹患此癌症的機率爲何？

(2) (9分) 若用B診斷法，從罹患者中檢驗出罹患此癌症的機率是 85%，而未罹患者中檢驗出患病的機率是 1%。試問 哪一種診斷法誤判機率較高？



$\boxed{\text{第六題}}$ (15分)

空間中三個向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 構成一平行六面體： $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}, \vec{b}=\overrightarrow{PR}, \vec{c}=\overrightarrow{PS}, \vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$

(1) (3分)試以 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示出"底面積"（即 $\square PQTR$）。

(2) (4分)試以 $\vec{n}, \vec{c}$ 表示出"高"（即 $\vec{c}$ 在 $\vec{n}$ 方向上的正射影向量之長度）。

(3) (4分)試僅以 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示出此平行六面體的體積。

(4) (4分)藉由前小題的結果，試判斷 $P(1,0,1), Q(3,-1,2), R(2,4,4), S(1,3,3)$ 四點是否共平面？