國立交通大學應用數學系

八十九年度大學推薦甄選入學筆試

一.

(1). (5分) 決定k 值使橢圓

$$4x^2+y^2-8x+4y+k=0$$

與直線 $y-6=-2\sqrt{3}(x-1)$ 相切.

(2). (5分) 求此橢圓的焦點及中心.

二. (10分) 若 c 爲一實數,且多項式 $p(x)=x^2+(c+2)x+2(c-1)$ 及 $q(x)=x^2+(c-5)x-c$ 之最高公因式爲一次式,試求c 之值.

三. 設兩直線

$$L_1 \quad : \quad \frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

$$L_2 \quad : \quad \frac{x-7}{-5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}.$$

問(1). (7分) L_1 及 L_2 是否相交? 若相交,求其交點.

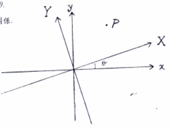
(2). (7分) L_1 及 L_2 是否在同一平面上? 若是,求此平面方程式.

四. (10分) 某一球員的投籃命中率是 $\frac{1}{3}$. 問投 6 球至少進 2 球的機率是多少?

五. 在一平面上有一 xy 座標系, 若在此平面上再取另一 XY 座標系(如圖所示), 設 P 爲平面上之一點,其原座標爲(x, y), 其對新座標系之座標爲(X, Y).

(1). (5分) 證明 $x=X\cos\theta-Y\sin\theta$.

(2). (5分) 仿上,試求 y 與X, Y 之關係.



六. 由二項式定理得知 $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k$. 試利用此式證明下列三式:

(1).(3分) $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n$.

(2).(5分) $n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_k^n$.

(3).(5分)

$$\frac{3^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k^n}{k+1} 2^{k+1}.$$

七.

(1). (5分) 設 c, L 爲兩個實數, $f(x)$ 爲一函數. 試作圖說明

"若 $0 < |x-c| < 1$, 則$|f(x) - L| < 2$" 之幾何意義.

(2). (8分)若$f(x) = 2x+3$, 則知 $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$.

(a)求一 c, 使得若$|x-1| < c$, 則 $|f(x) - 5| < 0.1$.

(b)證明: 若$d > 0$, 則有一 c 使得

若 $|x-1| < c$,則 $|f(x) - 5| < d$.

八. (10 分) 求多項式

$$p(x) = (1+x)x^{99} + (1+x)^2 x^{98} + \cdots + (1+x)^{99} x + (1+x)^{100}$$

的 x^{20} 項之係數.

九. (10分) 證明: 若 a, b 爲二個實數且 $a < b$, 則至少有一有理數 r 使得 $a < r < b$.