國立陽明交通大學應用數學系
一百一十學年度大學甄選申請入學考試試題

說明:

一. 答題前請先檢查答案本封頁上之編號是否與座位上之編號相符。

二. 本試卷共兩頁，內含五大題計算證明題，每題 20 分，總計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。

三. 作答時，請務必寫下計算證明過程，若僅有答案該題將不予計分。

四. 答案本請依題號順序填寫。

五. 繳卷時請將題目卷一併繳回。

六. 參考公式:

1. 正弦定理
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$
這裡 a、b、c 分別為三角形 ΔABC 的角 A、B、C 的對邊長。

2. 三倍角正弦公式
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

3. 二維數據的迴歸直線方程式斜率: 設 $(x_i, y_i), i=1,\cdots,n$ 為二維數據，則 y 對 x 的迴歸直線方程式的斜率為
$$m=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2},$$
其中，μ_x 和 μ_y 分別為 x 和 y 的樣本平均數。

第一題: (20 分) 請回答下列問題:

(a) (6 分) 計算由 $(2,-3,-2)$，$(-2,3,2)$，$(4,3,-1)$ 三點所決定的三角形的面積。

(b) (6 分) 計算由 $\vec{A}=(1,2,3)$ ，$\vec{B}=(1,3,5)$ ，$\vec{C}=(1,1,6)$ 三個向量所決定的六面體的體積。

(c) (8 分) 若
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&1&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix},$$
$$C=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{-1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$
且 $W=D\cdot C\cdot B\cdot A$。計算矩陣 W 的行列式 $|W|$。

第二題: (20 分) 請回答下列問題:

(a) (6 分) 找出所有的 θ 使得 $\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 0$。

(b) (6 分) 計算橢圓 $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 到直線 $x - y - 10 = 0$ 的最短距離。

(c) (8 分) 若 $\theta = \frac{\pi}{100}$, 計算 $\sin\theta + \sin(3\theta) + \sin(5\theta) + \ldots + \sin(199\theta) =?$

第三題: (20 分) 假設有一個三角形的三邊長分別為三個連續的正整數。請回答下列問題並證明：

(a) (10 分) 是否存在這樣的三角形，使得其最大角是最小角的兩倍?

(b) (10 分) 是否存在這樣的三角形，使得其最大角是最小角的三倍?

第四題: (20 分) 假設有一多項式 $f(x) = ax^4 + x^3 - (3a+1)x^2 - 6x - 4a$，試證

(a) (10 分) 對所有的實數 a，$f(x)$ 有相同的實根，並求出這個根。

(b) (10 分) 存在一個 x_0，使得對所有的實數 a，$f(x_0) \neq 0$。

第五題: (20 分) 阿明是一個考古學家，無意間發現一張古老寶藏平面尋找指南，其敘述如下:
當你在 A 點時，走向目標 B 點，到達 B 點時向右轉，走與 A、B 兩點相同的距離，到達 D 點。
當你在 A 點時，走向另一目標 C 點，到達 C 點時向左轉，走與 A、C 兩點相同的距離，到達 E 點。寶藏就位於 D 點和 E 點的中間處。
由於年代久遠，阿明仔細調查 A、B 和 C 三點可能的位置，發現 A 點可能地點有兩處 (A_1 和 A_2)，B 點可能地點有四處 (B_1、B_2、B_3 和 B_4) 和 C 點可能地點有兩處 (C_1 和 C_2)，其可能地點直角座標與正確機率如下:

	A_1	A_2	B_1	B_2	B_3	B_4	C_1	C_2
位置座標	(1,2)	(1,-1)	(0,2)	(-1,2)	(-2,2)	(-3,2)	(3,1)	(3,2)
位置正確機率	0.6	0.4	0.6	0.2	0.1	0.1	0.7	0.3

請回答以下問題:

(a) (4 分) 如果 A、B、C 三點正確位置分別為 A_2、B_1 和 C_1，則寶藏的位置座標為何?

(b) (8 分) 若阿明選取 A_2、B_1、C_1 三點為指南中 A、B、C 三點位置，且依寶藏平面尋找指南，找到寶藏的正確位置，則阿明所選取此三點位置座標都為指南中 A、B、C 三點正確位置的機率為何?

(c) (8 分) 若阿明突發奇想，從 A、B、C 三點的可能位置分別找一點，則取哪三點會使此三點位置座標資料的 y 座標對 x 座標迴歸直線的斜率最大?