國立交通大學應用數學系
一零九學年度大學甄選申請入學考試試題

說明:

一、 答題前請先檢查答案本封頁上之編號是否與座位上之編號相符。

二、 本試卷共兩頁，內含五大題計算證明題，每題 20 分，總計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。

三、 作答時，請務必寫下計算過程，若僅有答案該題將不予計分。

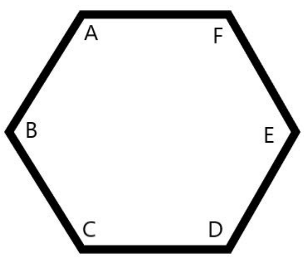
四、 答案本請依題號順序填寫。

五、 繳卷時請將題目卷一併繳回。

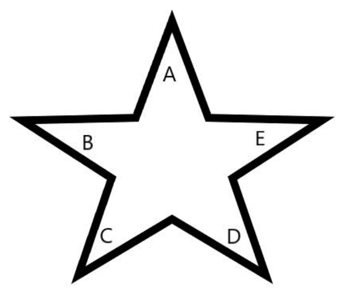
第一題

(a) (10 分) 計算六邊形 (如圖一) 的內角和，即 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$? 理由為何?

(b) (10 分) 計算五角形 (如圖二) 的內角和，即 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=$? 理由為何?



圖一



圖二

第二題

(a) (5 分) 若 A,B 為任意兩個實數，底下的不等式是否正確? 理由為何?。

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \le \frac{A^2+B^2}{2}。$$

(b) (5 分) 若 $A<B$ 定義 $\min\{A,B\}=A$ 且定義 $\max\{A,B\}=B$。若 a,b,c,d 為任意實數，其中 $a,b>0$，底下的不等式是否正確? 理由為何?

$$\min\left\{\frac{c}{a},\frac{d}{b}\right\} \le \frac{c+d}{a+b} \le \max\left\{\frac{c}{a},\frac{d}{b}\right\}。$$

(c) (10 分) 若 a,b,c,x,y,z 為任意實數，其中 $a,b,c>0$ 且 $a+b+c=1$。底下的不等式是否正確? 理由為何?

$$(ax+by+cz)^4 \le ax^4+by^4+cz^4。$$

$\boxed{\text{第三題}}$

(a) 令 $\langle a_n \rangle$ 為一數列。假設其首項為 1 且滿足遞迴關係 $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{2}$。

(1) (7 分) 試證此數列為遞增數列。

(2) (6 分) 找出其最小上界，並證之。

(b) (7 分) 令 $\langle b_n \rangle$ 為一數列。假設其首項為 1 且滿足遞迴關係 $b_{n+1} = b_n + 2n$。試求 b_n 的一般表達式。

$\boxed{\text{第四題}}$ 已知變換 T 將平面上的點 (x,y) 送到 $(x-3y, 2x+4y)$，不難得知平面上的直線經過 T 變換後仍是直線，所以稱為線性變化。現在考慮曲線 $C = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$，以及 C 經過 T 變換後的曲線 $T(C) = \{T(x,y) : (x,y) \in C\}$，回答以下問題。

(a) (6 分) 寫出 $T(C)$ 的方程式。

(b) (6 分) 找出所有 $T(C)$ 上座標為整數的點。

(c) (8 分) 考慮 C 包圍的區域 $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$。找出 $T(D)$ 的面積。

$\boxed{\text{第五題}}$ <u>阿圖姆</u> 與 <u>巴薩卡</u> 進行一場遊戲對決。遊戲規則為兩人同時各擲一顆公正的骰子 (六面出現的機率皆相同)，點數大者贏得該回合，點數相同則算平手重新擲骰，先贏得五回者獲勝，遊戲進行直到其中一方獲勝為止。

(a) (4 分) <u>阿圖姆</u> 先贏得一回的機率為何?

(b) (4 分) 最後由 <u>阿圖姆</u> 獲勝的機率為何?

(c) (6 分) 當 <u>阿圖姆</u> 已贏三回，<u>巴薩卡</u> 已贏四回時，最後是 <u>阿圖姆</u> 獲勝的機率為何?

(d) (6 分) 當<u>阿圖姆</u> 已贏三回，<u>巴薩卡</u> 已贏四回時，而且目前這回合 <u>阿圖姆</u> 擲出 3 的情況下 (<u>巴薩卡</u>的骰子還在轉動)，最後是 <u>阿圖姆</u> 獲勝的機率為何?