國立交通大學應用數學系

一百零七學年度大學甄選申請入學考試試題

說明：

(1) 答題前，請先檢查答案本封面上之編號是否與座位上之編號相符。

(2) 本試卷共五題計算證明題 (三頁試題)，總分共計 100 分，測驗時間為 100 分鐘。

(3) 作題時，必須要寫下計算過程，若是僅有答案，則該題不予計分。

(4) 請依題號順序作答。

(5) 繳卷時請同時繳回題目卷。

第一題 (20 分) 設 n 是正整數，函數

$$f_n(x)=|x-1|+|x+1|+|x-\frac{1}{2}|+|x+\frac{1}{2}|+\cdots+|x-\frac{1}{n}|+|x+\frac{1}{n}|,$$

其中自變數 x 之取值範圍為所有實數。

(1) (6 分) 描繪函數 $f_1(x)=|x-1|+|x+1|$ 之圖形。(必須簡要說明作圖之依據。)

(2) (4 分) 請寫出 <u>所有x 的值滿足不等式</u> $|x-1|+|x+1|\leq 10$。

(3) (10 分) 求函數 $f_n(x)$ <u>的最小值m</u>，並寫出 <u>所有x 的值滿足等式</u> $f_n(x)=m$，請解釋理由。

第二題 (20 分)

(1) (6 分) 求 $\sin(105°)$ 之值，並 <u>用根式表示之</u>。(若以小數點近似值，則不予計分。)

(2) (6 分) 設 $0°<x,y<90°$ 且 x,y 滿足條件 $\underline{\tan(x)=3\tan(y)}$，請證明：$x-y\leq 30°$。

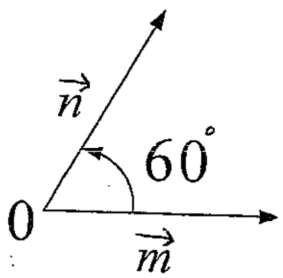
(3) (8 分) 已知 $\sin(\alpha)+\cos(\beta)=\frac{3}{5}$ 且 $\cos(\alpha)+\sin(\beta)=\frac{4}{5}$，試求 <u>$\cos(\alpha)\sin(\beta)$ 的值</u>。

第三題 (20 分)

(1) (6 分) 空間中兩個 <u>非平行</u> 向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$。假設 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ 且 $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$。請證明：

$$|\vec{a}|=|\vec{b}| \quad \underline{\text{若且唯若}} \quad \vec{c}\text{跟}\vec{d}\text{垂直。}$$

(2) (6 分) 平面上兩個單位向量 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$，其 <u>夾角為60°</u>，如下圖所示。試求向量 $\vec{v}=2\vec{m}+\vec{n}$ 與向量 $\vec{w}=2\vec{n}-3\vec{m}$ 之夾角 θ。



(3) (8 分) 假設 $x,y,z>0$ 且 $0°<A,B,C<180°$ 滿足條件 $A+B+C=180°$。請用 <u>平面向量表示法</u> 與 <u>平面向量的柯西不等式</u>，證明下列不等式成立：

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2yz\cos(A)+2zx\cos(B)+2xy\cos(C)$$

第四題 (20 分) 設 P 為平面上一點，座標為 $(\sqrt{2},\frac{1}{4})$。E 為一橢圓，方程式為 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$。

(1) (4 分) 請用 <u>三角函數</u> 寫出 E 的參數式。

(2) (6 分) 令 $Q(a,b)$ 為橢圓上一點，L 為通過 Q 點之切線，θ 為 L 與 $\overline{PQ}$ 的夾角。已知 L 的方程式為 $4a(x-a)+b(y-b)=0$。請將 <u>$\cos(\theta)$ 的絕對值用 a 和 b 表示出來</u>。

(3) (10 分) 假設 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$ 使得 $\cos(\delta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin(\delta)=\frac{1}{3}$。將 (1) 代入 (2) 後，<u>求出所有 $\cos(\theta)=0$ 的解</u>，並指出哪些解為橢圓上距離 P 點的 <u>最遠點和最近點</u>。

第五題 (20 分) 志明 和 春嬌 參加一項野外活動營，活動期間分別進行了 A、B 兩種遊戲。A、B 遊戲的場地都是環形，其上方分別有七個踏板，依順時針方向編號 0 至 6。遊戲進行者都是從 0 號踏板出發，每投擲一次骰子後，即按照骰子出現的點數（1 點至 6 點）前進。A 遊戲進行者依順時針方向前進，B 遊戲進行者依逆時針方向前進。舉例來說，如果 A 遊戲進行者在 2 號踏板，那在擲出 3 點後則前進至 5 號踏板。如果 B 遊戲進行者在 1 號踏板，那在擲出 2 點後則前進至 6 號踏板。A 遊戲完成的規則是要回到 0 號踏板，B 遊戲完成的規則是要經過所有踏板至少一次（出發點這一次不算）。假設骰子是公平的（即每一面出現的機率均為 $\frac{1}{6}$），且每次投擲均為獨立事件。

(1) (4 分) 春嬌 和 志明 同時參加 A 遊戲，兩人輪流擲骰子依序前進（也就是某一個人擲出骰子前進後，換另一個人擲骰子前進），並由 志明 擲出第一次。請問 志明 先完成遊戲的機率是多少？

(2) (8 分) 志明 參加 A 遊戲，平均要擲多少次骰子才能完成遊戲？

(3) (8 分) 春嬌 參加 B 遊戲，平均要擲多少次骰子才能完成遊戲？

（註：(1)、(2)、(3) 作答時請簡述理由或寫下計算過程，只提供答案者不給分。）