國立交通大學應用數學系

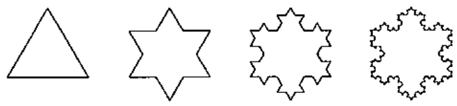
一百零六學年度大學甄選申請入學考試試題

說明:

- 本試卷共五題計算證明題, 總分共 100 分. 測驗時間為 100 分鐘.
- 除多選題外, 答題時請仔細寫下解題與計算過程. 若只寫答案, 則該題不予計分.
- 請依題號順序作答.
- 繳卷時請同時繳回題目卷.

第一題

假設 $\triangle ABC$ 是邊長為 1 的正三角形. 將三邊分別三等份, 取中間段為一邊向外側作一個正三角形, 並且將中間這一段擦去. 其次將剩下的每一邊再三等份, 取中間段為一邊向外做正三角形, 再將中間一段擦去. 依此序繼續下去, 得到一系列的圖形. 這種自我複製的圖形, 稱為科赫雪花曲線 (Kock snowflake). 如下圖 (步驟一, 二, 三, 四 $\cdots\cdots$):



$\cdots\cdots$

記 ℓ_n 為步驟 n 科赫雪花曲線的周長, A_n 為步驟 n 科赫雪花曲線所圍出區域的面積.

(1) (4 分) 計算 ℓ_5 與 A_5 分別為多少?

(2) (6 分) 分別建立 ℓ_n 與 A_n 的遞迴表示式.

(3) (10 分) 試求數列 $\langle \ell_n \rangle$ 與 $\langle A_n \rangle$ 的一般項通式 (需詳列推導過程).

$\boxed{\text{第二題}}$

(1) (8 分) 設 2×2 矩陣 A 滿足

$$A^3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{8} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{29}{16} \\ -\frac{29}{32} & \frac{47}{16} \end{bmatrix}.$$

試求 A^2 與 A.

(2) (7 分) (承上題) 已知平面三點座標分別為 $O(0,0)$, $P(1,2)$, $Q(3,4)$. 經過 A 線性轉換後分別為點 O', P', Q'. 試求三角形 $\Delta O'P'Q'$ 之面積.

(3) (5 分) (承上題 (1)) 設 E 為橢圓 $x^2 + 4y^2 = 1$. 橢圓 E 經過 A 線性轉換後之圖形為 E'. 試問 E' 為何?

$\boxed{\text{第三題}}$

一個箱子一開始有白色和黑色的球各一個, 接著開始依次抽球. 每次從箱子裡抽出一顆球, 然後再放回箱子中. 如果抽中的是白球, 則另外在箱中多放入一顆白球. 反之, 則多放入一顆黑球. 舉例來説, 如果目前箱子中有 3 顆白球和 6 顆黑球, 則抽完一次後, 箱子內的可能情形分別是 4 顆白球和 6 顆黑球, 以及 3 顆白球和 7 顆黑球. 假設每顆球被抽中的機率一樣.

(1) (8 分) 令 $a_{n,k}$ 為抽完 n 次球後, 箱子內有 k 顆白球的機率. 請推導出 $a_{n,k}$ 的遞迴表示式.

(2) (8 分) 運用第一題的結果, 歸納出 $a_{n,k}$ 的值.

(3) (4 分) 令 b_n 為抽完 n 次球後箱子中白球個數的期望值. 則 b_n 的值為何?

第四題

(1) (5 分) 找出點 $p = (-2, 3)$ 到直線 $3x - 4y + 5 = 0$ 的距離.

(2) (5 分) 找出由以下四點 $(1,2,3)$, $(1,3,6)$, $(3,8,6)$, $(3,7,3)$ 所決定之平行四邊形的面積.

(3) (10 分) 找出點 $P = (2,1,4)$ 到由以下不共線三點 $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$ 所決定之平面的距離.

第五題

設 a, b, c, d 為實數且滿足條件 $ad - bc \neq 0$. 假設函數 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

(1) (5 分) 請寫出函數 $f(x)$ 的定義域與值域.

(2) (5 分) 證明 $f(x)$ 是一對一函數.

(3) (5 分) 尋找 $f(x)$ 的反函數 $f^{-1}(x)$.

(4) (5 分) 尋找所有 a, b, c, d 使得 $f(x) = f^{-1}(x)$.
