NCTS 人才培育計劃　March 7, 2025

張量分析談莫爾圓極點法及其工程應用

研究主題

張量分析談莫爾圓極點法及其工程應用

主題介紹

張量分析與莫耳圓極點法是工程數學與力學中的重要工具，其廣泛應用於應力應變分析、結構設計和材料力學等領域。在這些工程應用中，張量提供了統一的數學架構，而莫耳圓則以直觀的幾何方式描述了應力和應變的變化。然而，傳統教學中對張量的抽象數學性質和莫耳圓的幾何特性常分開討論，導致學生難以將兩者連結而導致學習上有所困難。本計劃的核心目標是從張量的角度系統性地分析莫耳圓及其極點法，探索其數學本質與工程應用價值。我們參考了《莫耳圓與二階張量關係之研究及其 Mathematica 動畫模擬》（陳正宗、李家瑋、涂雅瀞）以及《由矩陣特徵值證明力學莫耳圓性質並應用於實際工程問題》（紀昭銘、林正山）等研究成果，通過數學推導深入闡明張量與莫耳圓之間的等價關係，並結合動態可視化技術，提供直觀且易於理解的學習體驗。

首先，我們將基於張量的特徵值和特徵向量性質，推導出莫耳圓的構建公式，並進一步分析極點法在應力和應變主軸方向中的幾何意義。透過這些推導，學生不僅可以掌握莫耳圓的幾何結構，還能理解其與張量不變量的關聯性。接著，我們將利用 Mathematica 和 MATLAB 進行數值模擬，製作動畫以動態展示物理量在不同坐標系轉換下的變化過程，幫助學生直觀地理解數學模型如何對應至現實世界中的物理現象。於理論層面，本計劃的重點在於針對張量與莫耳圓之間的數學關係進行全面推導與驗證，旨在揭示莫耳圓幾何特性與張量特徵值之間的內在聯繫。

我們將運用數學分析工具，詳細闡述莫耳圓的構建與其極點的數學意義，並討論這些數學概念在材料力學與結構力學中的潛在應用價值。此外，為了增強教學與研究的可視化效果，我們將充分利用 Mathematica 和 MATLAB 等軟體，製作一系列動畫模擬，直觀呈現座標變換下物理量的變化，幫助學生與研究者理解張量分量的動態行為與莫耳圓的不變量特性。這些動畫將專注於理論驗證與視覺化表達，而非模擬特定工程場景，以更聚焦於數學理論的普適性與嚴謹性。

本計劃的價值在於，通過嚴謹的數學推導與創新的視覺化教學方法，讓學生深入理解張量與莫耳圓的關係，並能夠將這些數學工具應用於未來的跨學科研究和實際問題解決中。為了進一步提升學生對理論的掌握與實踐能力，我們將設計以問題為導向的學習活動，指導學生完成數值模擬和案例分析。在教學過程中，學生將學習如何運用張量分析與莫耳圓理論解決實際問題，並通過可視化工具增強對理論和數據的理解。這些學習活動將不僅有助於學生掌握專業技能，還將激發他們的跨學科思維和創新能力。總之，本計劃致力於將數學理論與工程應用相結合，促進學術研究與實踐的深度融合。透過動態模擬和實際案例，我們希望構建一個跨領域的學習架構，為未來的教育和研究提供範例，並協助學生在數學與工程領域中取得突破性進展。

活動規劃

第一階段：理論基礎與數學推導

1. 介紹張量的基本概念，特別是特徵值與特徵向量的數學性質及其物理意義。
2. 深入講解莫耳圓的構建公式及其與張量不變量的數學聯繫。
3. 推導極點法的幾何意義結合實例分析其在應力與應變主軸方向中的應用。

目標：學生能清楚理解張量與莫耳圓的理論基礎，並掌握相關公式的推導過程。

第二階段：數值模擬與動態可視化

1. 使用 Mathematica 和 MATLAB，教學如何製作動畫模擬，直觀展示張量分量隨坐標系轉換的行為。
2. 結合動態模擬，強調莫耳圓的不變量特性及其在物理現象中的穩定性。
3. 引導學生將數學公式與模擬結果進行比較，驗證理論的正確性。

目標：學生能自行實現數值模擬，並能解釋模擬結果如何反映張量和莫耳圓的特性。

第三階段：案例分析與工程應用

1. 探討莫耳圓在工程應用中的實際案例，例如梁的彎矩設計和材料主應力方向的分析。
2. 設計分組研究任務，鼓勵學生以理論為基礎，完成個人或小組的模擬與推導項目。
3. 組織期末成果展示，學生匯報理論分析、模擬結果及應用價值。

目標：學生能將理論知識與工程實踐結合，並能以學術報告形式呈現研究成果。

活動目標

1. 讓學生掌握張量分析與莫耳圓方法的數學基礎，並理解其在工程中的重要性。
2. 提升學生使用數值模擬工具（Mathematica 和 MATLAB）的能力，並能以動畫形式呈現物理現象。
3. 強化學生的數學推導與問題解決能力，建立其從理論到應用的完整思路。
4. 鼓勵學生在模擬中發現問題並提出改進建議，培養其獨立思考與創新能力。
5. 提供合作研究的機會，增強學生的團隊協作與學術表達技巧。

數學背景與公式描述 (Mathematical Background and Formulae)

為了幫助學生更好地理解張量分析、莫爾圓及極點法的數學背景，我們將擴展數學描述，詳細闡述莫爾圓、極點法以及矩陣關係的作用，並提供具體的應用範例，清楚說明將要進行動態模擬的部分。

應力轉換公式 (Stress Transformation Formula)

這些公式用於計算旋轉後的應力分量。在將應力從一個坐標系轉換到另一個坐標系時，公式如下：

$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta,$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta.$$

這幫助學生理解如何在旋轉座標系中計算應力，這對於理解莫耳圓和張量分析非常重要。

莫耳圓的構建公式 (Mohr's Circle Construction Formula)

莫耳圓的中心和半徑是根據應力矩陣的數學性質來定義的。公式如下：

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}, \quad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

這些公式能幫助學生理解莫耳圓的幾何結構並直觀地展示應力狀態變化。

張量不變量 (Invariants of a Tensor)

對於應力矩陣，主**對角線之和**和**行列式**是張量的不變量，這些不變量在應力分析中具有關鍵作用：

$$\mathrm{Tr}(\sigma) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$
$$\det(\sigma) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2$$

這些不變量在應力和應變分析中對理解材料的行為至關重要，並且在莫耳圓的幾何圖形中也能有所體現。

應力矩陣的特徵值 (Eigenvalues of the Stress Matrix)

這兩個特徵值 λ_1 和 $\lambda 2$ 分別代表了主應力，並且對應於莫耳圓的兩個極端點。特徵值計算公式為：

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

「推薦/活動前必備讀物」及相關參考資料。

[1] R. Aris, Vectors, Tensors, and the basic equations of fluid mechanics, Dover, 1985.

[2] K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence, Mathematical methods for physics and engineering, Cambridge University Press, 2006.

[3] S. Timoshenko, Strength of materials, D. Van Nostrand Company, 1930.

[4] Russell C. Hibbeler, Structural analysis, Pearson, 2019.

[5]陳正宗、李家瑋、涂雅瀞, 莫耳圓與二階張量關係之研究及其 Mathematica 動畫模擬(上), 數學傳播, 43 卷 4 期, pp. 71-90. 2019.

[6]陳正宗、李家瑋、涂雅瀞, 莫耳圓與二階張量關係之研究及其 Mathematica 動畫模擬(下), 數學傳播, 44 卷 1 期, pp. 58-66. 2020.

[7] 紀昭銘、林正山, 由矩陣特徵值證明力學莫耳圓性質並應用於實際工程問題, 數學傳播, 46 卷 3 期, pp. 79-98. 2022.